Cvičenie — 2. týždeň

1. Určte $a \in \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$, pre ktoré
   a. $35 - 128 + 15^3 \equiv a \pmod{n}$ pre $n = 2, 5, 17$, [0, 2, 1]
   b. $166^3 + 234^4 + 1126^5 \equiv a \pmod{n}$ pre $n = 2, 3, 5$, [0, 2, 3]
   c. $78^{10} + 55^{15} \equiv a \pmod{n}$ pre $n = 2, 3, 5, 7$, [1, 1, 4, 0]
2. Ukážte, že $13 \big| \left(2^{100} + 10\right)$, $\big($ pomôcka: $100 = 4 \times (3 \times 8 + 1)$, $2^4 \equiv 3 \pmod{13}$, $3^3 \equiv 1 \pmod{13}$, $\implies ((2^4)^{25} + 10) \equiv 0 \pmod{13}\big)$
3. Dokážte, že pre každé $n \in N$ je $n^5 - n$ deliteľné piatimi.
4. Dokážte, že pre každé $n \in N$ je $6^{2n} - 8$ deliteľné siedmimi. $\big($ pomôcka: $6 \equiv -1 \pmod{7}, 8 \equiv 1 \pmod{7}\big)$
5. Riešte rovnice v poli Z_5 a) $x^5 + x^3 + x = 3$; [{1,3}]
   b) $x^5 + x^4 + 3x^2 + 2x + 3 = 0$ [{1,3}]
6. Vydeľte polynómy: $(2x^3 + 3x^2 + 4x + 3) : (x^2 + x + 1)$ a) nad R, b) nad Z_5.
   [a) aj b) $2x^3 + 3x^2 + 4x + 3 = (x^2 + x + 1)(2x + 1) + x + 2$]
7. Určte $\frac{1}{2} \in Z_3$, $\frac{1}{2} \in Z_5$ (prvok inverzný k 2).
8. Pomocou Euklidovho algoritmu vypočítajte prvok inverzný (vzhľadom na násobenie) k prvku a v poli Z_p.
   a) $a = 12, p = 37$, b) $a = 12, p = 41$, c) $a = 14, p = 97$, [a) 34, b) 24, c) 7]
9. Napíšte všetky ireducibilné polynómy z $P(Z_2)$ stupňa 2,3 a 4. [$x^2 + x + 1$, $x^3 + x + 1$, $x^3 + x^2 + 1$, $x^4 + x + 1$, $x^4 + x^3 + 1$, $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$]
10. Rozložte na súčin ireducibilných polynómov nad poľom K polynóm
    a. $x^2 + x + 1$, $K = C, R, Z_2, Z_3, Z_5$ [nad C: $(x + \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})(x + \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2})$,
    nad R, Z_2, Z_5: $x^2 + x + 1$, Z_3: $(x + 2)^2$]
    b. $x^3 + x + 1$, $K = Z_2, Z_3, Z_5$ [Z_2, Z_5: $x^3 + x + 1$, Z_3: $(x - 1)(x^2 + x + 2)$]
    c. $x^7 + x^5 + x^3 + x + 1$, $K = Z_2$ (využite výsledok príkladu 9.) [$x^7 + x^5 + x^3 + x + 1$]