Lineárna algebra — Týždeň 11–12.

1. Daná je množina $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_m\} \subset R^n$. Vypočítajte navzájom ortogonálne vektory $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_m\} \subset R^n$, pre ktoré platí $\operatorname{span}\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_k\} = \operatorname{span}\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_k\}$ pre všetky $k = 1, 2, \dots, m$.
   a. $m = 2, n = 4$, $\mathbf{f}_1 = (1,1,1,1)$; $\mathbf{f}_2 = (1,0,1,0)$.
   b. $m = 3, n = 4$, $\mathbf{f}_1 = (1,1,1,1)$; $\mathbf{f}_2 = (1,0,1,0)$; $\mathbf{f}_3 = (1,1,0,0)$.
   c. $m = 3, n = 4$, $\mathbf{f}_1 = (1,0,0,1)$; $\mathbf{f}_2 = (1,0,0,0)$; $\mathbf{f}_3 = (-1,1,2,0)$.
   d. $m = 3, n = 5$, $\mathbf{f}_1 = (1,0,0,1,1)$; $\mathbf{f}_2 = (1,0,0,0,-1)$; $\mathbf{f}_3 = (-1,1,2,0,0)$.

a. $\mathbf{e}_1 = (1,1,1,1)$; $\mathbf{e}_2 = \frac{1}{2}(1,-1,1,-1)$. b. $\mathbf{e}_1 = (1,1,1,1)$; $\mathbf{e}_2 = \frac{1}{2}(1,-1,1,-1)$, $\mathbf{e}_3 = \frac{1}{2}(1,1,-1,-1)$.
c. $\mathbf{e}_1 = \mathbf{f}_1$; $\mathbf{e}_2 = \frac{1}{2}(1,0,0,-1)$, $\mathbf{e}_3 = \frac{1}{2}(0,1,2,0)$, d. $\mathbf{e}_1 = \mathbf{f}_1$; $\mathbf{e}_2 = \mathbf{f}_2$, $\mathbf{e}_3 = \frac{1}{6}(-1,6,12,2,-1)$

2. Rozhodnite, či je matica P ortogonálna.

   a. $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ [nie je] b. $P = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ [áno]

3. Daná je symetrická matica $A \in R^{n\times n}$. Nájdite diagonálnu maticu D a maticu $P \in R^{n\times n}$ tak, aby $A = PDP^\top$.

   a. $A = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$, b. $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -36 \\ 0 & -3 & 0 \\ -36 & 0 & -23 \end{pmatrix}$, c. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, d. $A = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$.

a. $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$, $P = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ 1 & -\sqrt{3} \end{pmatrix}$ b. $D = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 25 & 0 \\ 0 & 0 & -50 \end{pmatrix}$, $P = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 0 & 4 & 3 \\ 5 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 4 \end{pmatrix}$,

c. $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$, d. $D = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$

4. Napíšte maticu lineárneho operátora $T\colon R^2 \to R^2$ vzhľadom na štandardné bázy, ak T
   a) je otočenie okolo počiatku o orientovaný uhol α,
   b) zobrazí bod $A = [x, y]$ na bod súmerný s A podľa osi x,
   c) zobrazí bod $A = [x, y]$ na bod súmerný s A podľa osi $y = 2x$,
   d) zobrazí vektor $\vec{u} = [x, y]$ na jeho kolmý priemet do priamky $y = 2x$.

   a) $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, c) $\begin{pmatrix} -3/5 & 4/5 \\ 4/5 & 3/5 \end{pmatrix}$, d) $\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$,

5. Napíšte maticu lineárneho operátora $T\colon R^3 \to R^3$ vzhľadom na štandardné bázy, ak T
   a) je rotácia okolo osi z o orientovaný uhol α,
   b) zobrazí bod $A = [x, y, z]$ na bod súmerný s A podľa roviny yz ($x = 0$),
   c) zobrazí bod $A = [x, y, z]$ na bod súmerný s A podľa roviny $2x - y + 3z = 0$.

   a) $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, c) $\frac{1}{7}\begin{pmatrix} 3 & 2 & -6 \\ 2 & 6 & 3 \\ -6 & 3 & -2 \end{pmatrix}$

6. Pomocou príkladu 2a) odvoďte súčtové vzorce pre $\sin(\alpha + \beta)$, $\cos(\alpha + \beta)$.
7. Nájdite rovnicu priamky $y(x) = kx + q$, pre ktorú je odchýlka (súčet štvorcov) $\sum_{i=-2}^{2} |y(x_i) - y_i|^2$ najmenšia. y_i sú hodnoty namerané v bodoch x_i z tabuľky

   a)

x_i	-2	-1	0	1	2
y_i	0	$0,4$	$0,5$	$0,8$	1

$y(x) = 0,24x + 0,54$

   b)

x_i	-2	-1	0	1	2
y_i	-0.5	0.5	$0,5$	1	1.5

$y(x) = 0,45x + 0,6$

   c)

x_i	-2	-1	0	1	2
y_i	-1	-1	$0,5$	1	$1,5$

$y(x) = 0,7x + 0,2$