Pr1A

$$A \in \mathbb{Z}^{2\times 4}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} A \\ I_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 6 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dokončite úpravy a napíšte množinu všetkých celočíselných riešení sústavy Ax=b. Overte, že sú to všetky riešenia.

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 6 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} S_3 + 2S_1 \\ S_2 - S_4 \end{matrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} S_3 - 3S_2 \\ S_4 - 5S_2 \\ S_1 - S_2 \\ -S_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 5 & 9 \\ 1 & 1 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\det U = \begin{vmatrix} -2 & -1 & 5 & 9 \\ 1 & 1 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & -1 & 9 \\ 1 & 1 & -5 \\ -1 & -1 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & -1 & 9 \\ 1 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

$$\mathbf{x} = U\mathbf{y} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 5 & 9 \\ 1 & 1 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3+5a+9b \\ 2-3a-5b \\ a \\ -2+3a+6b \end{pmatrix}$$

$P = \{(-3+5a+9b, 2-3a-5b, a, -2+3a+6b) : a, b \in \mathbb{Z}\}$

matica U nie je určená jednoznačne, množina P môže byť určená rôznymi výrazmi.

Pr1B

$$A \in \mathbb{Z}^{2\times 4}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} A \\ I_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dokončite úpravy a napíšte množinu všetkých celočíselných riešení sústavy Ax=b. Overte, že sú to všetky riešenia.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} S_3 - 2S_1 \\ S_2 - S_4 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -3 & 5 \\ 1 & -1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} S_3 + 3S_2 \\ S_4 - 5S_2 \\ S_1 - 2S_2 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & -5 & 9 \\ -2 & 1 & 3 & -5 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -3 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\det U = \begin{vmatrix} 3 & -1 & -5 & 9 \\ -2 & 1 & 3 & -5 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -3 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -1 & -5 & 9 \\ -2 & 1 & 3 & -5 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 1,$$

$P = \{(2-5a+9b, -1+3a-5b, 1-a, 1-3a+6b) : a, b \in \mathbb{Z}\}$

matica U nie je určená jednoznačne, množina P môže byť určená rôznymi výrazmi.

Pr2A)

$$A=\begin{pmatrix}0&1&-2\\2&0&3\\1&-1&3\end{pmatrix},\quad \mathbf{b}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}.$$

Určte a) trace A, b) minimálny polynóm $m_{A,\mathbf{b}}(\lambda)$ vektora $\mathbf{b}$ vzhľadom na maticu A, c) vlastné čísla matice A, d) Jordanovu maticu J a maticu P, pre ktorú $A=PJP^{-1}$

a) trace$A=3$, b) hľadáme nenulový polynóm $m_{A,\mathbf{b}}(\lambda)=a_0+a_1\lambda+a_2\lambda^2+a_3\lambda^3$ najmenšieho stupňa taký, že $a_0\mathbf{b}+a_1A\mathbf{b}+a_2A^2\mathbf{b}+a_3A^3\mathbf{b}=\mathbf{0}$.

$$A\mathbf{b}=\begin{pmatrix}0&1&-2\\2&0&3\\1&-1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\ A^2\mathbf{b}=A(A^{\mathbf{b}})=\begin{pmatrix}2\\-1\\-2\end{pmatrix},\ A^3\mathbf{b}=A(A^2\mathbf{b})=\begin{pmatrix}3\\-2\\-3\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\mathbf{b}&A\mathbf{b}&A^2\mathbf{b}&A^3\mathbf{b}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&2&3\\1&0&-1&-2\\0&-1&-2&-3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&-1&-2\\0&1&2&3\end{pmatrix}\implies\begin{matrix}a_3=0\\a_2=1\\a_1=-2\\a_0=1\end{matrix}$$

$\underline{m_{A,\mathbf{b}}(\lambda)=\lambda^2-2\lambda+1}=(\lambda-1)^2$ c) podľa výsledku a), b) $\lambda_{1,2}=1$, $\sigma(A)=(1,1,1)$
(počítať $\det(A-\lambda I)$ nebolo potrebné!!)

Vl. vektory: $A-I=\begin{pmatrix}-1&1&-2\\2&-1&3\\1&-1&2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$, vl. v. $\mathbf{v}=t\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$, $t\neq0$, preto je $J=J_3(1)=\underline{\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}}$

Maticu P (nie je jednoznačne určená) môžeme v tomto prípade počítať aj tak, že zvolíme P_{*1} a dopočítame $P_{*2}=(A-I)P_{*1}$, $P_{*3}=(A-I)P_{*2}$: $\underline{P=\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&2&-1\\0&1&1\end{pmatrix}}$. P_{*1} musíme voliť tak, aby P_{*2} nebol vlastný vektor.

Pr2B)

$$A=\begin{pmatrix}0&2&1\\1&0&-1\\-2&3&3\end{pmatrix},\quad \mathbf{b}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}.$$

Určte a) trace A, b) minimálny polynóm $m_{A,\mathbf{b}}(\lambda)$ vektora $\mathbf{b}$ vzhľadom na maticu A, c) vlastné čísla matice A, d) Jordanovu maticu J a maticu P, pre ktorú $A=PJP^{-1}$
Ten istý postup stručnejšie: a) trace$A=3$,

$$\text{b)}\quad\begin{pmatrix}0&2&1\\1&0&-1\\-2&3&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&1&1&1\\0&1&2&3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&2&3\end{pmatrix}\implies\underline{m_{A,\mathbf{b}}(\lambda)=\lambda^2-2\lambda+1}$$

c) $\sigma(A)=(1,1,1)$
(počítať $\det(A-\lambda I)$ nebolo potrebné!!)

d) $A-I=\begin{pmatrix}-1&2&1\\1&-1&-1\\-2&3&2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&0\end{pmatrix}$, $\mathbf{v}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$, $\underline{P=\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&1&0\\0&-2&1\end{pmatrix}}$, $\underline{J=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}}$

Pr3A)

Napíšte maticu lineárneho operátora $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vzhladom na štandardné bázy, ak T zobrazí bod A na bod s ním súmerne združený podla roviny $\rho \equiv 2x + 3y + 3z = 0$.

Stĺpce matice $T_{\mathcal{E}}$ tvoria obrazy štandardnej bázy.

$\mathbf{n} = (2,3,3) \perp \rho$, $T(1,0,0) = (x,y,z) \implies (x-1,y,z) = t(2,3,3) \implies T(1,0,0) = (1+2t, 3t, 3t)$
$\mathbf{e}_1 = A = (1,0,0), B = (x,y,z)$ $\mathrm{dist}(A,\rho) = \mathrm{dist}(B,\rho) \implies$
$2 = |2(1+2t) + 3\cdot 3t + 3\cdot 3t| = |2+22t| \implies 2(1+2t) + 3\cdot 3t + 3\cdot 3t = 2 + 22t = \pm 2,$
$2 + 22t = 2 \implies t = 0$ zodpovedá bodu A,
$2 + 22t = -2 \implies t = \frac{-4}{22} = -\frac{2}{11} \implies 1 + 2t = \frac{11-4}{11} = \frac{7}{11}$, $3t = -\frac{6}{11}$, t.j $B = \frac{1}{11}(7,-6,-6)$

$T_{\mathcal{E}} = P \implies P_{*1} = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} 7 \\ -6 \\ -6 \end{pmatrix}$.

Podobný postup zopakujeme pre body $T\mathbf{e}_2 = T(0,1,0)$ a $T\mathbf{e}_3 = T(0,0,1)$ a dostaneme
$T(0,1,0) = (x,y,z) \implies (x, y-1, z) = t(2,3,3) \implies 4t + 9t + 3 + 9t = -3 \implies t = -\frac{3}{11}$,
$x = 2t = -\frac{6}{11}$, $y = 1 + 3t = \frac{2}{11}$, $z = 3t = -\frac{9}{11}$.
$T(0,0,1) = (x,y,z) \implies x = -\frac{6}{11}, y = -\frac{9}{11}, z = \frac{2}{11}$.

$$T_{\mathcal{E}} = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} 7 & -6 & -6 \\ -6 & 2 & -9 \\ -6 & -9 & 2 \end{pmatrix}$$

Pr3B)

Napíšte maticu lineárneho operátora $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vzhladom na štandardné bázy, ak T zobrazí bod A na bod s ním súmerne združený podla roviny $\rho \equiv 2x - 3y + 3z = 0$.

Maticu môžeme vypočítať podobne ako v Pr3A. Ukážeme si ešte iný postup.

Pre tento operátor je ľahké nájsť bázu $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ zloženú z vlastných vektrov:
$\mathbf{b}_1 = \mathbf{n} = (2,-3,3) \perp \rho \implies T\mathbf{b}_1 = -\mathbf{b}_1$, príslušné vlastné číslo je -1.
Každý vektor $\mathbf{u} \parallel \rho$, resp. bod $A \in \rho$ sa zobrazí na seba (je vlastný s vlastným číslom $=1$). Zvolíme napr. $\mathbf{b}_2 = (3,2,0)$ a $\mathbf{b}_3 = (0,1,1)$.

$$T_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad \text{ak } P = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{tak } T_{\mathcal{E}} = PT_{\mathcal{B}}P^{-1}.$$

Rozvojom podľa R_3: $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 9 + 13 = 22$, $P^{-1} = \frac{1}{22}\begin{pmatrix} 2 & -3 & 3 \\ 6 & 2 & -2 \\ -6 & 9 & 13 \end{pmatrix}$

$$T_{\mathcal{E}} = \frac{1}{22}\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -3 & 3 \\ 6 & 2 & -2 \\ -6 & 9 & 13 \end{pmatrix} = \frac{1}{22}\begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -3 & 3 \\ 6 & 2 & -2 \\ -6 & 9 & 13 \end{pmatrix} = \frac{1}{22}\begin{pmatrix} 14 & 12 & -12 \\ 12 & 4 & 18 \\ -12 & 18 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\underline{T_{\mathcal{E}} = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} 7 & 6 & -6 \\ 6 & 2 & 9 \\ -6 & 9 & 2 \end{pmatrix}}$$

Pr4A) a) Zistite, ci má polynóm $f(x) = x^7 + 2x^6 + 2x^4 + x^2 + x + 1 \in P(Z_3)$ ireducibilný delitel násobnosti viac ako 1.
b) V poli $Z_{97} = \{0, 1, 2, \dots, 96\}$ určte $a = 60^{-1}$, $b = -60$.

a) $f'(x) = x^6 + 2x^3 + 2x + 1$

$$(x^7 + 2x^6 + 2x^4 + x^2 + x + 1) : (x^6 + 2x^3 + 2x + 1) = x + 2$$
$$-\underline{(x^7 + 2x^4 + 2x^2 + x)}$$
$$2x^6 + 2x^2 + 1$$
$$-\underline{(2x^6 + x^3 + x + 2)}$$
$$2x^3 + 2x^2 + 2x + 2$$

$$(x^6 + 2x^3 + 2x + 1) : (x^3 + x^2 + x + 1) = x^3 + 2x^2 + 2$$
$$-\underline{(x^6 + x^5 + x^4 + x^3)}$$
$$2x^5 + 2x^4 + x^3 + 2x + 1$$
$$-\underline{(2x^5 + 2x^4 + 2x^3 + 2x^2)}$$
$$2x^3 + x^2 + 2x + 1$$
$$-\underline{(2x^3 + 2x^2 + 2x + 2)}$$
$$2x^2 + 2 = \gcd(f, f')$$

$$(x^3 + x^2 + x + 1) : (x^2 + 1) = x + 1$$
$$-\underline{(x^3 + x)}$$
$$x^2 + 1$$
zvyšok 0

$\deg \gcd(f, f') = 2 > 0 \implies$ áno, má ireduc. del. nás. viac ako 1.

b) $\underline{b = 37}$

97	60	1	0	1
60	37	1	1	-1
37	23	1	-1	2
23	14	1	2	-3
14	9	1	-3	5
9	5	1	5	-8
5	4	1	-8	13
4	1		13	-21

$\underline{a = -21 + 97 = 76}$

Pr4B) a) Zistite, ci má polynóm $f(x) = x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x \in P(Z_2)$ ireducibilný delitel násobnosti viac > 1.

b) V poli $Z_{97} = \{0, 1, 2, \dots, 96\}$ určte $a = 59^{-1}$, $b = -59$

Stručnejšie: a) $f'(x) = x^4 + x^2 + 1$,

$$(x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x) : (x^4 + x^2 + 1) = x^2 + x$$
$$^{+}\underline{(x^6 + x^4 + x^2)}$$
$$x^5 + x^3 + x$$
$$\underline{x^5 + x^3 + x}, \text{zv. } 0 \implies \text{ áno.}$$

b) Podobne ako v prípade a) dostaneme $\underline{b = 38}$, $\underline{a = 74}$

Pr5A) $A \in P(Z_2)$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$m_A(\lambda) = \lambda^3 + \lambda^2$

napísať $\det(A - \lambda I)$ nestačí $m_A(\lambda)$ sa nemusí rovnať $\det(A - \lambda I)$

Vl. č. a vektory

$$\lambda = 0 \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \lambda = 1 \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

5B)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$m_A = \lambda^3 + 1$

napísať $\det(A - \lambda I)$ nestačí $m_A(\lambda)$ sa nemusí rovnať $\det(A - \lambda I)$

Vl. č. a vektory

$$\lambda = 0 \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ 0 \text{ nie je vl. č.} \qquad \lambda = 1 \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Pr6

Rozšírenú maticu sústavy lineárnych rovníc upravte na redukovanú stupnovitú a napíšte množinu všetkých jej riešení.

A)

a) v poli Z_2 $\quad x_2 + x_4 = 1$ $\quad$ b) v poli Z_3 $\quad 2x_2 + x_4 = 1$

$x_1 + x_3 + x_4 = 0$ $\quad x_1 + 2x_3 + x_4 = 0$

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$ $\quad x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 1$

B)

a) v poli Z_2 $\quad x_2 + x_4 = 1$ $\quad$ b) v poli Z_3 $\quad 2x_2 + x_4 = 1$

$x_1 + x_3 + x_4 = 1$ $\quad x_1 + 2x_3 + x_4 = 1$

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$ $\quad x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 1$

Rišenie sústavy A) a B) sa líšia len pravými stranami, napíšeme ich do jednej matice

$$\text{a)} \left(\begin{array}{cccc|cc} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cc} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

A) $P = \{(0,1,0,0); (1,1,1,0)\}$, $\quad$ B) $P = \{(0,0,0,1); (1,0,1,1)\}$

$$\text{b)} \left(\begin{array}{cccc|cc} 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cc} 0 & 1 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cc} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

A) $P = \{(1,2,1,0); (2,0,0,1); (0,1,2,2)\}$, $\quad$ B) $P = \{(0,2,2,0); (1,0,1,1); (2,1,0,2)\}$