1. [10 bodov] Matica $A = \begin{pmatrix} -4 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & -3 \end{pmatrix}$ má 3-násobné vlastné číslo. Určte

a) [4] stopu a vlastné číslo matice A, $\quad \operatorname{trace} A = -4-2-3 = -9 = 3\lambda \implies \lambda_{1,2,3} = -3$

b) Jordanovú maticu J a maticu P, pre kt. $A = PJP^{-1}$,

$$A - \lambda I = A + 3I = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \implies \text{ vl. vektory sú } : t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ t \neq 0$$

preto $J = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ (existuje báza $R^{3\times 1}$, ktorú tvorí jeden reťazec zovšeobecnených vl. vektorov)
Zovšeobecnené vl. vektory:

$$P_{*3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \implies P_{*2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \end{array}\right) \implies P_{*1} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad P = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

V tomto prípade (vieme, že J je jeden Jordanov blok) aj takto:

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \implies$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad J = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

c) [1] $m_A(\lambda) = m_J(\lambda) = (\lambda + 3)^3$

---

2. [8] Nájdite rovnicu priamky $y(x) = kx + q$, pre ktorú je súčet $\sum_{i=-2}^{2} |y(x_i) - y_i|^2$ najmenší. Hodnoty y_i s v tabuľke →

x_i	-2	-1	0	1	2
y_i	-1	0	2	3	4
$y(x_i)$					

Doplňte tretí riadok tabuľky a načrtnite graf (priamku $y(x) = kx + q$ a body $[x_i, y_i]$).

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^\top A = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad A^T \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 8 \end{pmatrix}, \qquad y(x) = 1,3x + 1,6$$

Tretí riadok: $y(x_i) = (-1 \quad 0,3 \quad 1,6 \quad 2,9 \quad 4,2)$

---

3. [5] V poli C riešte rovniocu $\dfrac{1+i}{2z + iz - i} = \dfrac{1}{z+1-i}$. Urobte skúšku správnosti.

$$\begin{aligned} \frac{1+i}{2z+iz-i} &= \frac{1}{z+1-i} / (2z+iz-i)(z+1-i) \\ z(1+i) + (1-i)(1+i) &= z(2+i) - i \\ z(1+i) + 2 &= z(2+i) - i \\ 2 &= z - i \\ z &= 2 + i \end{aligned}$$

Skúška: $L = \dfrac{1+i}{(2+i)(2+i)-i} = \dfrac{i+1}{4+4i+i^2-i} = \dfrac{i+1}{4+4i-1-i} = \dfrac{i+1}{3(i+1)} = \dfrac{1}{3}$,
$P = \dfrac{1}{2+i+1-i} = \dfrac{1}{3}$.

4. [5] Určte bázu a dimenziu jadra LO $T\colon R^4 \to R^2$, $T(x_1,x_2,x_3,x_4) = (2x_1 - x_2 + x_3, x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4)$.

$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim_{r2-r1} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\ker T = \{(a, b, b-2a, -a-b)\colon a, b \in R\} =$
$\{a(1,0,-2,-1) + b(0,1,1,-1)\colon a, b \in R\}$. Báza: $\mathcal{B} = \{(1,0,-2,-1),(0,1,1,-1)\}$, $\dim\ker T = 2$

---

5. [10] Nech L, M sú lineárne priestory nad poľom R. Nech $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3, \mathbf{b}_4, \mathbf{b}_5\}$ je báza priestoru L, $\mathcal{D} = \{\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \mathbf{d}_3\}$ je báza priestoru M. Napíšte

a) [1] $\dim M$ b) [2] sradnice $[2\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_3 + 3\mathbf{b}_4]_{\mathcal{B}}$

c) [3] maticu $T_{\mathcal{BD}}$ lineáneho operátora T urenho vzťahmi
$T\mathbf{b}_1 = \mathbf{d}_2$, $T\mathbf{b}_2 = \mathbf{d}_1 + \mathbf{d}_2 + \mathbf{d}_3$, $T\mathbf{b}_3 = 2\mathbf{d}_1 + \mathbf{d}_2 + 2\mathbf{d}_3$, $T\mathbf{b}_4 = 0$, $T\mathbf{b}_5 = -\mathbf{d}_1 + 2\mathbf{d}_2 - \mathbf{d}_3$.

d) [4] $\dim\ker T =$ $\dim\operatorname{Ran} T =$

riešenie:

a) $\dim M = 3$(počet prvkov bázy), b) $[2\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_3 + 3\mathbf{b}_4]_{\mathcal{B}} = (2 \quad 0 \quad -1 \quad 3 \quad 0)^\top$

c) $T_{\mathcal{BD}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

d) $\dim\ker T = 3$ (napr. lebo treba 3 parametre), $\dim\operatorname{Ran} T = 2$ (súčet musí byt 5)

---

[3] Napíšte množinu všetkých riešení sústavy, ktorej matica je $\left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 1 & 2 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 3 \end{array}\right)$

Matica je redukovaná stupňovitá, neznáme x_1, x_3, x_5 zvolíme ako parametre
$P = \{(a,\, -1-2b+c,\, b\,, 3+3c\,,\, c)\colon a, b, c \in R\}$

---

7. [8 bodov] $f(x) = x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1 \in P(Z_3)$.

a) [4] Zistite, či má polynóm $f(x)$ ireducibilný deliteľ násobnosti aspoň 2.

b) [4] Napíšte rozklad polynómu f na súčin ireducibilných polynómov (nad Z_3).

a. $f'(x) = x^3 + x + 1$, $f(x) = (x+1)f'(x) + f_2$, $f_2 = x^2 + 2x$
$f'(x) = (x+1)f_2 + f_3$, $f_3 = 2x + 1$
$f_2 = 2xf_3 \implies \gcd(f, f') = f_3 = 2x+1 \implies$ áno, má, navyše je to $(2x+1)^2 = (-x+1)^2 = (x-1)^2 | f(x)$

b. $f(x) = (x-1)^2(x^2+1)$ (delením $f(x) : (x-1)^2$ napr. pomocou Hornerovej sch.) $g(x) = x^2 + 1$ je ireducibilný, lebo $g(0) = 1, g(1) = 2 = g(2)$.

Všetky delenia treba samozrejme do riešenia napísať.

---

8. [10] V poli F riešte sústavu lineárnych rovníc. Rozšírené matice sústav najprv upravte na redukované stupňovité.

a) $F = Z_2$
$$\begin{aligned} x_1 + x_3 + x_4 &= 1 \\ x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 + x_4 &= 1 \end{aligned}$$

b) $F = Z_3$
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_3 + x_4 &= 1 \\ 2x_2 + x_3 &= 2 \\ x_1 + x_2 + 2x_4 &= 1 \end{aligned}$$

a. $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim_{R_3+R_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$
$P = \{(1,0,0,0); (0,0,0,1); (0,1,1,0); (1,1,1,1)\}$

8b. $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right) \sim_{r_3+2r_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim_{r_3+r_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim_{\substack{r_1-r_3 \\ r_2+r_3 \\ 2r_2 \\ 2r_3}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right)$,
$P = \{(2,2,1,0); (2,0,2,1); (2,1,0,2)\}$

9. [6] Určte všetky vlastné šísla $\lambda \in Z_3$ a príslušné vlastné vektory matice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in Z_3^{3\times 3}$

Vyskúšame $\forall\, \lambda \in Z_3$:

$\lambda_1 = 0,\ A - \lambda I = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim_{r_2+r_1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, vl. vekt. $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\lambda_2 = 1,\ A - \lambda I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \implies \lambda_2 = 1$ nie je vlastné číslo.

$\lambda_3 = 2,\ A - \lambda I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \implies$ vl. ektory: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

10a. [3] V poli $P(Z_2)/(x^2+x+1)$ určte prvok inverzný (vzhľadom na násobenie) k prvku $(x+1)$.

Pomocou Euklidovho algoritmu v $P(Z_2)$: $1 = (x^2+x+1) + x(x+1) \implies (x+1)^{-1} = x$,

alebo $(x+1)^{-1} = \dfrac{1}{x+1} = \dfrac{0+1}{x+1} = \dfrac{(x^2+x+1)+1}{x+1} = \dfrac{x^2+x+1+1}{x+1} = \dfrac{x(x+1)}{x+1} = x$

10b. [2] Pre $a \in Z$, $b \in \{0, 1, \ldots, 58\}$ platí $59a + 5b = 1$. V poli Z_{59} určte b^{-1}.

$59 = 0 \pmod{59} \implies 1 = 59a + 5b = 5b \pmod{59} \qquad 5b = 1 \pmod{59} \implies b^{-1} = 5$