Pr1

1\. pr.) $T_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&1&-1\end{pmatrix}$ $T_{\mathcal{BE}} = \begin{pmatrix}1&1&1\\1&0&2\\-1&0&-1\end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}2&2&1&1&1&1\\-1&-1&0&-1&0&2\\2&1&2&-1&0&-1\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&0&-1&0&-2\\0&1&-1&2&1&2\\0&-1&2&1&0&3\end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&2&0&0&1\\0&1&-1&2&1&2\\0&0&1&3&1&5\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-6&-2&-9\\0&1&0&5&2&7\\0&0&1&3&1&5\end{array}\right) \quad T_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix}-6&-2&-9\\5&2&7\\3&1&5\end{pmatrix}$$

Pr2

2\. pr.)

$$\begin{pmatrix}1&2&1&-3\\1&4&2&2\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&2&1&5\\1&-2&-1&3\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix} \sim \left(\begin{array}{cccc}1&0&0&0\\0&1&0&0\\\hline 2&-1&0&8\\0&0&1&0\\-1&1&-2&-5\\0&0&0&1\end{array}\right) \begin{pmatrix}2\\1\\a\\b\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3+8b\\a\\-1-2a-5b\\b\end{pmatrix}$$

$$P = \{(3+8b;\ a;\ -1-2a-5b;\ b);\ a,b \in \mathbb{Z}\}$$

Pr3

3\. pr.) a) $tr(A) = 0$

b) $\begin{vmatrix}-1-\lambda & -2 & 0\\ -2 & -\lambda & 2\\ 0 & 2 & 1-\lambda\end{vmatrix} = \lambda(1-\lambda^2) + 4(1+\lambda) + 4(\lambda-1) = \lambda(1-\lambda^2) + 8\lambda =$

$= \lambda(9-\lambda^2) = \lambda(3-\lambda)(3+\lambda)$ $\quad \lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 3,\ \lambda_3 = -3$

λ_1: $\begin{pmatrix}1&2&0\\0&4&2\\0&2&1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1&0&-1\\0&2&1\end{pmatrix} \rightarrow \bar{v}_1 = \begin{pmatrix}-2\\1\\-2\end{pmatrix}$

λ_2: $\begin{pmatrix}-4&-2&0\\-2&-3&2\\0&2&-2\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}2&3&-2\\0&2&-2\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}2&1&0\\0&1&-1\end{pmatrix} \rightarrow \bar{v}_2 = \begin{pmatrix}1\\-2\\-2\end{pmatrix}$

λ_3: $\begin{pmatrix}2&-2&0\\-2&3&2\\0&2&4\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&2\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&2\end{pmatrix} \rightarrow \bar{v}_3 = \begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}$

$P = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}-2&1&+2\\1&-2&2\\-2&-2&-1\end{pmatrix}$ $\quad D = \begin{pmatrix}0&0&0\\0&3&0\\0&0&-3\end{pmatrix}$ $\quad PDP^T = A$

4\. pr.) $(x^8+x^6+x^2+1):(2x^7+2x) = 2x$

$-(x^8+x^2)$

$\overline{\quad x^6+1 \quad} = \text{gcd}$ $\quad$ st. gcd $> 0 \Rightarrow$ áno, má ireduc. deliteľ st > 1.

$(2x^7+2x):(x^6+1) = 2x$

$-(2x^7+2x)$

$\overline{\quad 0 \quad}$

5. pr.) a) $tr(A) = -3 \quad \lambda_2 = 1$

b) $\det(A) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0$ $\Big\} \Rightarrow \lambda_3 = -4$

alebo: $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 3 & -3-\lambda & -1 \\ 2 & -3 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda^2)(3+\lambda) + 3(\lambda - 1) =$

$= (1-\lambda)\big(\overbrace{(1+\lambda)(3+\lambda) - 3}^{\lambda^2+4\lambda}\big) = \lambda(1-\lambda)(4+\lambda)$

$\Rightarrow \lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 1,\ \lambda_3 = -4$

$\lambda_1: \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & -1 \\ 2 & -3 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & -3 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \bar{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

$\lambda_2: \begin{pmatrix} 3 & -4 & -1 \\ 2 & -3 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \bar{v}_2 = \begin{pmatrix} -5 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\lambda_3: \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \bar{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$P = \begin{pmatrix} 0 & -5 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad J = D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$ c) A je diagonizovateľná

6. pr.) a) $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$ $P = \{(1+a, 1+a+b, a, b), a, b \in Z_2\}$

$P = \{(1,1,0,0), (0,0,1,0), (1,0,0,1), (0,1,1,1)\}$

b) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$ $P = \{(1,0,2)\}$

7. pr.) $9 = 3^2$ a) $P(Z_3)/_{x^2+1}$ b) Z_{23} c) $\nexists$

8. pr.) $T = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$

9. pr.) dosadením 0, 1, 2 do $A - \lambda I$ zistíme, že všetky sú vl. č.

$0: \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \bar{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \bar{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$1: \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \bar{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \bar{v}_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$2: \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \bar{v}_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \bar{v}_6 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

10. pr.)

a	b	q	a_0	b_0	a_1	b_1
97	21	4	1	0	0	1
21	13	1	0	1	1	-4
13	8	1	1	-1	-4	5
8	5	1	-1	2	5	-9
5	3	1	2	-3	-9	14
3	2	1	-3	5	14	-23
2	$\boxed{1}$			$\boxed{-8}$		$\boxed{37}$

$\gcd(97, 21) = 1 = -8 \cdot 97 + 37 \cdot 21$

$a = -8$

$b = 37 = x$

11. pr.) $\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\bar{v}_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\nexists \lambda$ aby $0 \cdot \lambda = 7 \Rightarrow$ $\bar{v}_1$ nie je vlastný vektor

$A \cdot \bar{v}_2 = A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

$A\bar{v}_2 = 2\bar{v}_2 \Rightarrow \bar{v}_2$ je vl. vekt. pre vlastné číslo 2.