v poliach R a C

1. [13 bodov] Daná je matica $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$. a $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Určte

   a) [1] stopu matice A, b) [3] minimálny polynóm $m_{A,\mathbf{b}}(\lambda)$ (vektora $\mathbf{b}$ vzhľadom na maticu A),

   c) [3] vlastné čísla matice A, d) [5] Diagonálnu maticu D a maticu P, pre ktorú $A = PDP^\top$,

   e) [1] minimálny polynóm matice A

   Riešenie:

   1a) $\mathrm{tr}(A) = 8$,

$$\text{b)}\quad \begin{array}{cccc} \mathbf{b} & A\mathbf{b} & A^2\mathbf{b} & A^3\mathbf{b} \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 16 & 64 \\ 0 & 2 & 8 & 32 \\ 1 & 2 & 8 & 32 \end{pmatrix} \sim_{R_3 - R_1} \begin{array}{cccc} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 16 & 64 \\ 0 & 2 & 8 & 32 \\ 0 & -2 & -8 & -32 \end{pmatrix} \implies \begin{array}{r} a_3 = 0 \\ a_2 = 1 \\ a_1 = -4 \\ a_0 = 0 \end{array} \implies m_{A\mathbf{b}}(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda\,.$$

c) Z a) a b) vyplýva $\lambda_1 = 0$, $\lambda_{2,3} = 4$.

d) $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$. Pre $\lambda = 0$ vlsatný vektor: $\mathbf{f}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$,

$$\text{pre } \lambda = 4\colon A - 4I \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \implies \mathbf{f}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ \mathbf{f}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Množina $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3\}$ je ortogonálna vynásobením $\mathbf{e}_i = \frac{1}{\|\mathbf{f}_i\|}\mathbf{f}_i$ dostaneme ortonormálnu množinu, stĺpce matice P, t.j. $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

e) $m_A(\lambda) = \lambda(\lambda - 4)$

---

2. [8] Nájdite rovnicu priamky $y(x) = kx + q$, pre ktorú je súčet $\sum_{i=-2}^{2} |y(x_i) - y_i|^2$ najmenší. Hodnoty y_i sú v tabuľke →

x_i	-2	-1	0	1	2
y_i	-1	0	2	3	4

$$\begin{array}{r} -2k + q = -1 \\ -k + q = 0 \\ q = 2 \\ k + q = 3 \\ 2k + q = 4 \end{array} \quad \text{ekvivalentne} \quad \underbrace{\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} k \\ q \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}}_{\mathbf{b}}$$

p, q vypočítame ako riešenie sústavy $A^\top A \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = A^\top \mathbf{b}$: $\left(\begin{array}{cc|c} 10 & 0 & 13 \\ 0 & 5 & 8 \end{array}\right) \implies \begin{array}{l} p = 1,3 \\ q = 1,6 \end{array}$

$p \equiv y = 1,3x + 1,6$

---

3. [4] Určte bázu a dimenziu podpriestoru $M = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in R^4\colon 2x_1 - x_2 + x_3 = x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 0\}$.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim R_2 - R_1 \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \implies,$$

$M = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in R^4\colon 2x_1 - x_2 + x_3 = x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 0\} = \{a(1, 0, -2, -1) + b(0, 1, 1, -1)\colon a, b \in R\}$

$\mathcal{B} = \{(1, 0, -2, -1);\ (0, 1, 1, -1)\}$, $\dim M = 2$

---

4. [5] Nech L, M sú lineárne priestory nad poľom R. Nech $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3, \mathbf{b}_4, \mathbf{b}_5\}$ je báza priestoru L, $\mathcal{D} = \{\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \mathbf{d}_3\}$ je báza priestoru M. Napíšte

   a) [1] $\dim M$ b) [1] súradnice $[2\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_3 + 3\mathbf{b}_4]_{\mathcal{B}}$

   c) [3] maticu $T_{\mathcal{BD}}$ lineárneho operátora T určeného vzťahmi
   $T\mathbf{b}_1 = \mathbf{d}_2$, $T\mathbf{b}_2 = \mathbf{d}_1 + \mathbf{d}_2 + \mathbf{d}_3$, $T\mathbf{b}_3 = 2\mathbf{d}_1 + \mathbf{d}_2 + 2\mathbf{d}_3$, $T\mathbf{b}_4 = 0$, $T\mathbf{b}_5 = -\mathbf{d}_1 + 2\mathbf{d}_2 - \mathbf{d}_3$.

   a) $\dim M = 3$; b) $[2\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_3 + 3\mathbf{b}_4]_{\mathcal{B}} = (2, 0, -1, 3, 0)^\top$; c) $T_{\mathcal{BD}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

V konečných poliach

5. [10) bodov] Daný je polynóm $f(x) = x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1 \in P(Z_3)$.

a) [6] Pomocou Euklidovho algoritmu zistite, či má polynóm $f(x)$ ireducibilný deliteľ násobnosti aspoň 2.

b) [4] Napíšte rozklad polynómu f na súčin ireducibilných polynómov (nad Z_3).

a. $f_1(x) = x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1$, $f_2 = f'(x) = x^3 + x + 1$,

$$\begin{array}{l}
(x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1) : (x^3 + x + 1) = x + 1 \\
-\underline{(x^4 + x^2 + x)} \\
\quad x^3 + x^2 + 1 \\
-\underline{(x^3 + x + 1)} \\
\quad x^2 - x = f_3
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
(x^3 + x + 1) : (x^2 - x) = x + 1 \\
-\underline{(x^3 - x^2)} \\
\quad x^2 + x + 1 \\
-\underline{(x^2 - x)} \\
2x + 1 = -x + 1 = f_4
\end{array}$$

$f_4 | f_3 \implies \gcd(f, f') = -x + 1$,

$\gcd(f, f') = f_4$ má stupeň 1, teda $f(x)$ má ireducibilný delteľ násobnosti viac ako jedna.

b. Podľa a) $x - 1$ je dvojnásobný deliteľ $f(x)$ takže, delením, napr. pomocou Hornerovej schémy, dostaneme: $f(x) = (x-1)^2(x^2+1)$, pretože $g(x) = x^2 + 1$ Je v $P(Z_3)$ ireducibilný $(g(0) = 1, g(1) = g(2) = 2)$ je to už rozklad na ireducibilné činitele.

---

6. [10] V poli F riešte sústavu lineárnych rovníc. Rozšírené matice sústav najprv upravte na redukované stupňovité.

a) $F = Z_2$
$$\begin{aligned} x_1 + x_3 + x_4 &= 1 \\ x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 + x_4 &= 1 \end{aligned}$$

b) $F = Z_3$
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_3 + x_4 &= 1 \\ 2x_2 + x_3 &= 2 \\ x_1 + x_2 + 2x_4 &= 1 \end{aligned}$$

a.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim_{R_3+R_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$P = \{(1,0,0,0); (0,0,0,1); (1,1,1,1); (0,1,1,0)\}.$$

b.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right) \sim_{R_3+2R_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim_{R_2+R_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim_{\substack{R_3+R_2 \\ R_1-R_2}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right)$$

$$\sim_{\substack{2R_2 \\ R_2 \leftrightarrow R_3}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right) \quad P = \{(2,2,1,0); (2,0,2,1); (2,1,0,2)\}$$

---

7. [8] Určte všetky vlastné čísla a vlastné vektory matice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in Z_3^{3\times 3}$

Vyskúšame všetky možné $\lambda \in Z_3$:

$$A - 0I = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim_{R_1+R_2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \implies \text{v.vek.: } \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$A - I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \implies \lambda = 1 \text{ nie je v.č.}$$

$$A - 2I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \implies \text{v.vek.: } \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

---

8. [2] V poli $P(Z_2)/(x^2+x+1)$ určte prvok inverzný (vzhľadom na násobenie) k prvku $(x+1)$.

$(x+1)^{-1} = x \pmod{x^2+x+1}$.

Odôvodnenie, napr.: $1 = 1 + 0 = 1 + x^2 + x + 1 = x^2 + x = x(x+1) \pmod{x^2+x+1}$

Bonus

a*) [2] Napíšte *aspoň dva rôzne* lineárne operátory $T\colon R^2 \to R^2$, ktorých matice $T_{\mathcal{B}}$ nezávisia od voľby bázy $\mathcal{B}$.

b*) [3] Určte *všetky* lineárne operátory $T\colon R^n \to R^n$, ktorých matice $T_{\mathcal{B}}$ nezávisia od voľby bázy $\mathcal{B}$.

a*) $T(x_1, x_2) = (x_1, x_2)$, $T(x_1, x_2) = (0, 0)$

b*) $T\mathbf{x} = t\mathbf{x}$, $t \in R$