v poliach R a C

1. [3 body] Napíšte minimálny polynóm matice $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

   Riešenie: $m_A(\lambda) = (\lambda+1)^3$ (3 je rozmer najväčšieho Jordanovho bloku, -1 je jediné vl. č.)

2. [8] Daný je $\triangle ABC$, $A = (-1,0)$, $B = (0,0)$, $C = (10,1)$. Určte lineárne zobrazenie $T : R^2 \to R^2$, ktoré transformuje $\triangle ABC$ na rovnoramenný pravouhlý trojuholník $\triangle A'B'C'$ s pravým uhlom pri vrchole B'. Vypočítajte $\mathbf{e} = T(1,0)$, $\mathbf{f} = T(0,1)$ a nájdite dva najkratšie z vektorov $\mathbf{e}, \mathbf{f}, \mathbf{e}+\mathbf{f}, \mathbf{e}-\mathbf{f}$.

   Riešenie:Napr. $\mathbf{u} = \vec{BA} = (-1,0)$, $\mathbf{v} = \vec{BA} = (10,1)$, ($\mathcal{B} = \{\mathbf{u},\mathbf{v}\}$ je báza) T: $T\mathbf{u} = (1,0)$, $T\mathbf{v} = (0,1)$.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 10 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 0 & 1 & -10 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \Longrightarrow$$

$$\mathbf{e} = (-1,0), \mathbf{f} = (10,1), \mathbf{e}+\mathbf{f} = (9,1), \mathbf{e}-\mathbf{f} = (-11,-1) \qquad \|\mathbf{e}\| < \|\mathbf{e}+\mathbf{f}\| < \|\mathbf{f}\| < \|\mathbf{e}-\mathbf{f}\|\,.$$

(Môže výjsť ∞ veľa iných riešení)

3. [8] Pre výsledky merania z tabuľky

x_i	-2	-1	0	1	2
y_i	-1	0	2	3	4

   nájdite rovnicu priamky $p \equiv y = kx + q$, pre ktorú je $\sum\limits_{i=-2}^{2} (y_i - y(x_i))^2$ minimálne.

   Riešenie:(Keby sa tá priamka dala preložiť presne cez tie body)

$$\begin{aligned} -2k + q &= -1 \\ -k + q &= 0 \\ q &= 2 \\ k + q &= 3 \\ 2k + q &= 4 \end{aligned} \iff A\begin{pmatrix} k \\ q \end{pmatrix} = \mathbf{b}, \quad A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$A\begin{pmatrix} k \\ q \end{pmatrix} = \mathbf{b} \implies A^\top A \begin{pmatrix} k \\ q \end{pmatrix} = A^\top \mathbf{b}\,, \text{t.j.} \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 8 \end{pmatrix} \qquad p \equiv \boxed{y = \frac{13}{10}x + \frac{8}{5}\,.}$$

4. $A = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 2 \\ -5 & -2 & -2 \\ -3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Určte

   a) [1] stopu matice A, b) [3] minimálny polynóm $m_{A,\mathbf{b}}(\lambda)$ vektora $\mathbf{b}$ vzhľadom na maticu A,

   c) [3] vlastné čísla matice A, d) [6] Jordanovu maticu J a maticu P, pre ktoré $A = PJP^{-1}$.

   Riešenie: a) $\mathrm{tr}(A) = 6 - 2 + 0 = 4$

   b) (do stĺpcov matice napíšeme $\mathbf{b}, A\mathbf{b}, A^2\mathbf{b}, A^3\mathbf{b}$) a riešime homogénny systém, riešenie je n-tica koeficientov polynómu. Vyberieme takú, aby bol čo najmenší stupeň)

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 6 & 14 \\ 0 & -2 & -6 & -14 \\ 1 & 0 & -2 & -6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 7 \\ 1 & 0 & -2 & -6 \end{pmatrix} \implies a_3 = 0, a_2 = 1, a_1 = -3, a_0 = 2 \implies m_{A,\mathbf{b}}(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 2$$

c) Z a), b) vyplýva $\lambda_1 = 2$, $\lambda_{2,3} = 1$.

d) $J = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$ (chýbajúce číslo doplníme podľa toho, či bude treba aj zovšeobecnený vl. vektor k $\lambda_{2,3} = 1$, stĺpce matice P sú vlastné a prípadne zovšeob. vl. vektory).

$$\lambda = 2 \implies A - \lambda I = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ -5 & -4 & -2 \\ -3 & -2 & -2 \end{pmatrix} \sim_{\substack{R_3+R_1 \\ R_2+R_1 \\ R_1-4R_3}} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \implies P_{*1} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda = 1 \implies A - \lambda I = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 2 \\ -5 & -3 & -2 \\ -3 & -3 & -1 \end{pmatrix} \sim_{\substack{R_1+2R_3 \\ R_2-2R_3}} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -3 & -2 & -1 \end{pmatrix} \implies P_{*3} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ a zovšeobecnený vl. v.}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 3 & 2 & 1 \\ -5 & -3 & -2 & -1 \\ -3 & -3 & -1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ -3 & -2 & -1 & -1 \end{array}\right) \implies P_{*2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, J = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

5. [8] Nech $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 6 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in R^{4\times 5}$. $L_r(A) = \operatorname{span}\{A_{1*}, A_{2*}, A_{3*}, A_{4*}\}$ je riadkový, $L_s(A) = \operatorname{span}\{A_{*1}, A_{*2}, A_{*3}, A_{*4}, A_{*5}\}$ stĺpcový a $N(A) = \{\mathbf{x} \in R^{5\times 1} \colon A\mathbf{x} = 0\}$ nulový priestor matice A. Určte bázy B_r, B_s priestorov $L_r(A)$, $L_s(A)$ a $\dim N(A)$ (t.j. dimenziu jadra operátora $Tx = Ax$).

Riešenie:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 6 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 6 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B \implies \begin{array}{c} \mathcal{B}_r = \{B_{1*}, B_{2*}, B_{3*}\}, \\ \mathcal{B}_s = \{A_{*1}, A_{*3}, A_{*4}\} \end{array}$$

$\dim L_r = \dim L_s = 3$, $\dim N(A) = 5 - 3 = 2$.

V konečných poliach

6. [6 bodov] Daný je polynóm $f(x) = x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1 \in P(Z_3)$. Napíšte rozklad polynómu f na súčin ireducibilných polynómov (nad Z_3).

Riešenie:(Napr. pomocou Hornerovej schémy delíme $f(x) : (x-1)$, dostaneme $f(x) = (x-1)^2(x^2+1)$, $g(x) = x^2 + 1$ je ireducibilný v $P(Z_3)$ (lebo inak by musel mať deliteľa stupňa 1, t.j. koreň): $g(0) = 1$, $g(1) = 2$, $g(2) = g(-1) = 2$. Dobré riešenie je aj $f(x) = (x+2)^2(x^2+1)$.

7. [12] V poli F riešte sústavu lineárnych rovníc. Rozšírené matice sústav najprv upravte na redukované stupňovité.

a) $F = Z_2$
$$\begin{aligned} x_1 + x_3 + x_4 &= 1 \\ x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 + x_4 &= 1 \end{aligned}$$

b) $F = Z_3$
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_3 + x_4 &= 1 \\ 2x_2 + x_3 &= 2 \\ x_1 + x_2 + 2x_4 &= 1 \end{aligned}$$

Riešenie:

7a. V Z_2: $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim_{R_3+R_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$.
$\{(1,0,0,0)); (0,0,0,1)); (0,1,1,0)); (1,1,1,1))\} = \{(1+a+b, a, a, b) \colon a, b \in Z_2\}$

7b. V Z_3 $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right) \sim_{\substack{R_3+2R_1 \\ 2R_2}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim_{R_3+2R_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim_{\substack{2R_3 \\ R_2+R_3 \\ R_1+R_3}}$
$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right)$, $\{(2, 2+a, 1+a, a) \colon a \in Z_3\} = \{(2,2,1,0); (2,0,2,1); (2,1,0,2)\}$.

8. [12] Nech $f_1(x) = x^7 + x^5 + x^4 + x^2 + x + 1$, $f_2(x) = x^4 + x^2 + x + 1 \in P(Z_3)$. Určte $a(x), b(x) \in P(Z_3)$, pre ktoré $\gcd(f_1, f_2) = a(x)f_1(x) + b(x)f_2(x)$

Riešenie:

Postupne delíme

$f_1 : f_2; (x^7 + x^5 + x^4 + x^2 + x + 1) : (x^4 + x^2 + x + 1) = x^3 \quad f_1 = x^3 f_2 + f_3 \implies f_3 = f_1 + 2x^3 f_2$

$$\begin{array}{l} -\underline{(x^7 + x^5 + x^4 + x^3)} \\ -x^3 + x^2 + x + 1 = f_3 \end{array}$$

$f_2 : f_3; (x^4 + x^2 + x + 1) : (-x^3 + x^2 + x + 1) = -x - 1 \quad f_2 = (-x-1)f_3 + f_4 \implies$
$\gcd(f_1, f_2) = f_2 + (x+1)f_3$

$$\begin{array}{l} -\underline{(x^4 - x^3 - x^2 - x)} \\ x^3 + 2x^2 + 2x + 1 \\ -\underline{(x^3 - x^2 - x - 1)} \\ 3x^2 + 3x + 2 = 2 = f_4 = \gcd(f_1, f_2) \end{array}$$

A stačí dosadiť za f_3: $\gcd(f_1, f_2) = f_2 + (x+1)f_3 = f_2 + (x+1)[f_1 + 2x^3 f_2] = (x+1)f_1 + (2x^4 + 2x^3 + 1)f_2$

$\boxed{a(x) = x + 1,\ b(x) = 2x^4 + 2x^3 + 1}$, (prípadne $a(x) = -2x - 2,\ b(x) = -x^4 - x^3 - 2$)

Bonus

[3] Napíšte maticu $A \in Z_2^{4\times 4}$, ktorej minimálny polynóm je $f(\lambda) = \lambda^2 + \lambda + 1$.

Riešenie:

napr. použijeme $A_f = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ako dva diagonálne bloky matice z $Z_2^{4\times 4}$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$