æ

Príklady LALP

doc. Michal Zajac

1 Vlastnosti komplexných čísel.

1. Číslo c napíšte v algebraickom tvare ($c = a + ib, a, b \in R$), znázornite v Gaussovej rovine a napíšte komlexne združené číslo $\bar{c}$.
   a) $c = \dfrac{2+3i}{1-5i}$ $[-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i]$ b) $c = (1+2i)^2\dfrac{1}{3+i}$ $[-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i]$ c) $c = i^{2007}$ $[-i]$
2. Znázornite číslo $c \in C$ a napíšte ho v goniometrickom tvare.
   a) $c = -1+i$ $[\sqrt{2}(\cos\frac{3}{4}\pi + i\sin\frac{3}{4}\pi]$ b) $c = 1-i\sqrt{3}$ $[2(\cos\frac{5}{3}\pi + i\sin\frac{5}{3}\pi)]$ c) $c = -\sqrt{3}+i$ $[2(\cos\frac{5}{6}\pi + i\sin\frac{5}{6}\pi)]$
3. Riešte rovnice s neznámou $z \in C$:
   a) $z^2 + 4z + 5 = 0$, b) $4z^2 + 4z + 2 = 0$, c) $z^3 = -i$, d) $z^4 = -1 + \sqrt{3}$, e) $z^4 = -4$

2. Polynómy.

1. Nájdite najväčší spoločný deliteľ polynómov f_1 f_2 ($\gcd(f_1, f_2)$) a vyjadrite ho v tvare $a(x)f_1(x)+b(x)f_2(x)$.
   a. $f_1(x) = 2x^4 - 5x^3 - 3x^2 + 2x + 1$, $f_2(x) = 2x^3 + 5x^2 + 6x + 2$ $[2x+1 = -\frac{8x+5}{73}f_1 + \frac{8x_2-35x+39}{73}f_2]$
   b. $f_1(x) = x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 3x + 2$, $f_2(x) = x^4 + 2x^2 + x + 2$ $[x^2+x+1 = \frac{1-x}{4}f_1 + \frac{1+x}{4}f_2]$
   c. $f_1(x) = 2x^3 + x^2 - x + 1$, $f_2(x) = x^2 + x + 1$ $[1 = \frac{x+2}{6}f_1 - \frac{2x^2+3x-4}{6}f_2]$
   d. $f_1(x) = x^3 - x^2 - x + 1$, $f_2(x) = x^3 + 2x^2 + x + 2$ $[1 = \frac{x^2+9x+10}{36}f_1 + \frac{-x^2-6x+13}{36}f_2]$
   e. $f_1(x) = 2x^5 - x^4 - 2x^3 + 1$, $f_2(x) = 2x^4 + 5x^3 + 4x^2 + 5x + 2$
2. Rozhodnite, či má daný polynóm koreň násobnosti aspoň 2.
   a. $f(x) = 2x^3 + x^2 - x + 1$ [nie]
   b. $f(x) = x^2 + x + 1$ [nie]
   c. $f(x) = x^6 + x^5 + 3x^4 + 2x^3 + 3x^2 + x + 1$ [áno]

3 Sústavy lineárnych rovníc.

1. Riešte sústavy s neznámymi z C.

a.
$$\begin{aligned} 4x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 &= 3\\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 &= 2\\ 2x_2 - x_3 - x_4 &= 2 \end{aligned}$$

b.
$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 &= 3\\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 &= 3\\ 3x_2 - x_3 - x_4 &= 1 \end{aligned}$$

c.
$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 &= -1\\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 \quad &= 0\\ 3x_2 - x_3 + x_4 &= 3 \end{aligned}$$

d.
$$\begin{aligned} 4x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 &= -3\\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 &= -1\\ 2x_1 \quad + x_3 + 2x_4 &= 1 \end{aligned}$$

e.
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 2x_3 &= 1\\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 &= 9\\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 &= 9 \end{aligned}$$

f.
$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 &= 2\\ 2x_2 + x_3 - 3x_4 &= 1\\ 3x_1 + x_3 - x_4 &= 1\\ -4x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 &= 2 \end{aligned}$$

2. Určte bázu a dimenziu riadkového, stĺpcového a nulového priestoru (jadra) matíc a rozšírených matíc sústav z príkladu 1.
3. Riešte sústavy s neznámymi zo Z_2.

a.
$$\begin{aligned} x_3 + x_4 &= 1\\ x_1 + x_2 + x_4 &= 0\\ x_1 + x_3 + x_4 &= 0 \end{aligned}$$

b.
$$\begin{aligned} x_2 + x_3 + x_4 &= 1\\ x_1 + x_2 + x_4 &= 1\\ x_1 + x_3 + x_4 &= 1 \end{aligned}$$

c.
$$\begin{aligned} x_2 + x_3 &= 1\\ x_1 + x_2 &= 0\\ x_2 + x_3 + x_4 &= 1 \end{aligned}$$

d.
$$\begin{aligned} x_1 + x_3 &= 1\\ x_1 + x_2 + x_4 &= 1\\ x_3 + x_4 &= 1 \end{aligned}$$

e.
$$\begin{aligned} x_1 + x_3 &= 1\\ x_2 + x_3 &= 1\\ x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \end{aligned}$$

f.
$$\begin{aligned} x_3 + x_4 &= 1\\ x_1 + x_3 + x_4 &= 1\\ x_2 + x_4 &= 0 \end{aligned}$$

4. Riešte sústavy s neznámymi zo Z_3.

a.
$$\begin{aligned} x_1+2x_2+x_3+2x_4&=0\\ x_2+2x_3+2x_4&=2\\ 2x_2+2x_3+2x_4&=2 \end{aligned}$$

b.
$$\begin{aligned} 2x_1+x_2+x_3+2x_4&=0\\ 2x_2+2x_3+2x_4&=0\\ 2x_3+2x_4&=1 \end{aligned}$$

c.
$$\begin{aligned} 2x_1+x_2+2x_3+2x_4&=2\\ x_2+2x_3&=0\\ 2x_3+x_4&=0 \end{aligned}$$

d.
$$\begin{aligned} x_1+x_2+x_3+2x_4&=0\\ x_2+2x_3+2x_4&=2\\ 2x_1+x_3+2x_4&=1 \end{aligned}$$

e.
$$\begin{aligned} x_1+2x_2+x_3&=1\\ 2x_1+2x_2+x_3&=0\\ x_1+x_3&=0 \end{aligned}$$

f.
$$\begin{aligned} 2x_1+2x_2+2x_3+2x_4&=2\\ 2x_2+x_3&=1\\ x_3+2x_4&=1\\ 2x_1+x_2+x_3+x_4&=2 \end{aligned}$$

Lineárny priestor a lineárne operátory.

1. Rozhodnite, či je lineárne nezávislá množina $M \subset R^4$.
   a. $M = \{(2,2,0,-1);(1,2,3,0);(0,1,2,-1);(3,3,1,0)\}$
   b. $M = \{(1,2,1,-1);(1,2,3,0);(0,1,2,-1);(1,1,0,0)\}$
   c. $M = \{(3,2,1,0);(0,1,2,3);(1,0,1,0)\}$
2. Rozhodnite, či je lineárne nezávislá množina $M = \{f_1, f_2, f_3\}$ funkcií $R \to R$, kde
   a. $f_1(x) = \sin x,\ f_2(x) = \sin 2x,\ f_3(x) = \sin 3x$
   b. $f_1(x) = x,\ f_2(x) = 1+2x,\ f_3(x) = x^2 + x$
   c. $f_1(x) = \cos 2x,\ f_2(x) = \sin^2 x,\ f_3(x) = \cos^2 x$
3. Rozhodnite, či je množina M podpriestor lineárneho priestoru C^4. Ak áno, nájdite jeho bázu a určte dimenziu M.
   a. $M = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in C^4 \colon x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 0\}$
   b. $M = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in C^4 \colon x_2 + 2x_3 - x_4 = x_1 - x_3 + x_4 = 0\}$
   c. $M = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in C^4 \colon x_1 + x_2x_3 = x_1x_2 + x_3 = 0\}$
4. Vypočítajte súradnice vektora $\mathbf{x}$ vzhľadom na usporiadanú bázu $\mathcal{B}$.
   a. $\mathbf{x} = (-8\,,5\,,-4)$, $\mathcal{B} = \{(2,\ -1,\ 2)\ ,\ (5,\ -3,\ 3)\ ,\ (-1,\ 0,\ -2)\}$
   b. $\mathbf{x} = (-8\,,5\,,-4)$, $\mathcal{B} = \{(2,\ 5,\ -1),(-1,\ -3,\ 0),(2,\ 3,\ -2)\}$
   c. $\mathbf{x} = (6\,,-1\,,7\,,-1)$, $\mathcal{B} = \{(1,\ 0,\ 2,\ -1),(0,\ 1,\ 4,\ -2),(2,\ -1,\ 0,\ 1);(2,\ -1,\ -1,\ 2)\}$
   d. $\mathbf{x} = (-1\,,9\,,-1\,,3)$, $\mathcal{B} = \{(11,1,-1,-1),(-1,9,-1,3),(-1,1,11,-1);(1,3,1,9)\}$
5. Rozhodnite, či je zobrazenie T lineárne. V prípadoch, keď je T, napíšte jeho maticu vzhľadom na štandardné bázy.
   a. $T\colon R^3 \to R^2$, $T(x_1,x_2,x_3) = (x_1 - 2x_2, x_2 + 3x_3)$
   b. $T\colon R^3 \to R^2$, $T(x_1,x_2,x_3) = (x_1 \cdot x_2, x_2 + x_3)$
   c. $T\colon R^3 \to R^3$, $T(x_1,x_2,x_3) = (2x_1 - x_2, x_3, x_1 + x_2 + x_3)$
   d. $T\colon R^3 \to R^3$, $T(x_1,x_2,x_3) = (x_1 - x_2 + x_3, 2x_2 - x_3, x_1 + 2x_2 - x_3)$
   e. $T\colon R^3 \to R^3$, $T(x_1,x_2,x_3) = (x_1x_2, 2x_2 - x_3, x_1 + 2x_2 - x_3)$
6. Napíšte matice lineárneho operátora $[T]_{\mathcal{E}}$, $[T]_{\mathcal{B}}$, $[T]_{\mathcal{E}\mathcal{B}}$, $[T]_{\mathcal{B}\mathcal{E}}$,
   a. $T\colon R^2 \to R^2$, $T\mathbf{x} = \mathbf{x}$, $\mathcal{E} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$, $\mathbf{e}_1 = (1,0)$, $\mathbf{e}_2 = (0,1)$; $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}$, $\mathbf{b}_1 = (-1,1)$, $\mathbf{b}_2 = (1,-2)$.
   b. $T\colon R^2 \to R^2$, $T(x_1,x_2) = (x_1 - 3x_2, 3x_1 + x_2)$, $\mathcal{E}$ a $\mathcal{B}$ sú rovnaké ako v príklade a.
   c. $T\colon R^3 \to R^3$, $T(x_1,x_2,x_3) = (x_1 - 3x_2, 3x_1 + x_2 + x_3, 0)$, $\mathcal{E} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, $\mathbf{e}_1 = (1,0,0)$, $\mathbf{e}_2 = (0,1,0)$, $\mathbf{e}_3 = (0,0,1)$; $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$, $\mathbf{b}_1 = (0,1,1)$, $\mathbf{b}_2 = (1,0,0)$, $\mathbf{b}_1 = (0,1,0)$
   d. $T\colon R^3 \to R^3$, $T(x_1,x_2,x_3) = (2x_1 - x_2 + x_3, 2x_1 + 2x_2 - x_3, x_1 + 2x_2 - x_3)$, $\mathcal{E}$ a $\mathcal{B}$ sú rovnaké ako v príklade c.
   e. $T\colon R^3 \to R^3$, $T(x_1,x_2,x_3) = (x_2 + x_3, x_1 + 2x_2 - 2x_3, x_2 - x_3)$, $\mathcal{E}$ a $\mathcal{B}$ sú rovnaké ako v príklade c.

3. Vlastné čísla a vlastné vektory štvorcových matíc..

1. Rozhodnite, či je $\mathbf{e}$ vlastný vektor matice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

   a) $\mathbf{e} = (2,1,2,1,2)^\top$ b) $\mathbf{e} = (2,1,-1,1,1)^\top$, c) $\mathbf{e} = (1,1,1,1,1)^\top$.

2. Nájdite všetky vlastné vektory matice $A \in Z_2^{3\times 3}$.

   a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ b) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ d) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

3.

4. Určte Jordanov tvar J a minimálny polynóm matice A. Nájdite regulárnu maticu P, pre ktorú $A = PJP^{-1}$.

a. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, $[J_3(2)]$

b. $A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ 3 & 2 & 3 \\ -2 & -2 & -3 \end{pmatrix}$, $[J_2(-1) \oplus J_1(-1)]$

c. $A = \begin{pmatrix} 6 & -7 & 4 \\ 1 & -2 & -1 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix}$, $[J_2(-1) \oplus J_1(10)]$

d. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, $[J_3(-1)]$

e. $A = \begin{pmatrix} 6 & -5 & -3 \\ 3 & -2 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$, $[J_2(1) \oplus J_1(2)]$

f. $A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}$, $[J_2(0) \oplus J_1(1)]$

g. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & -2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $[J_3(1) \oplus J_1(1)]$

h. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & -3 \\ 4 & -1 & 3 & -3 \end{pmatrix}$, $[J_2(0) \oplus J_2(0)]$

i. $A = \begin{pmatrix} 15 & 28 & -7 \\ -6 & -11 & 3 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$, $[J_1(0) \oplus J_1(0) \oplus J_1(2)]$

j. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & -2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $[J_3(1) \oplus J_1(1)]$

k. $A = \begin{pmatrix} 11 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 9 & 1 & 3 \\ -1 & -1 & 11 & 1 \\ -1 & 3 & -1 & 9 \end{pmatrix}$, $[J_2(8) \oplus J_1(12) \oplus J_1(12)]$

l. $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$, $[J_1(3) \oplus J_3(2)$

5. Určte minimálny polynóm vektora $(1,1,1,1)^\top$ vzhľadom na matice z príkladov 4g, h, j, k, l.

6. Napíšte maticu, ktorej minimálny polynóm je $f(\lambda)$

   a. $f(\lambda) = \lambda^4 - 2\lambda^3 + 3\lambda + 5$, b. $f(\lambda) = 2\lambda^4 + 3\lambda^3 - 2\lambda + 4$, c. $f(\lambda) = \lambda^5 - \lambda^4 + \lambda^3 - \lambda^2 - \lambda + 1$.