Cvičenie — 1. týždeň

1. Riešte sústavy lineárnych rovníc (v poli R)

$$\begin{aligned} 4x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 &= 3 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 &= 1 \\ 2x_2 - x_3 - x_4 &= 2 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 &= 4 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 &= 3 \\ 3x_2 - x_3 - x_4 &= 1 \end{aligned}$$

$\left[\{(\frac{1-a}{2}, \frac{5+3a}{2}, a, 3+2a) : a \in R\} = \{(\frac{5-b}{4}, \frac{1+3b}{4}, \frac{-3+b}{2}, b) : b \in R\}\right]$ $[\{(2-a, 1, a, 2-a) \colon a \in R\} = \{(b, 1, 2-b, b) \colon b \in R\}]$

2. V obore komplexných čísel riešte rovnice

a) $2z + 3iz - 1 + 2i = -2 + i$ $[-\frac{5}{13} + i\frac{1}{13}]$, b) $\dfrac{1+i}{2z + iz - i} = \dfrac{1}{z + 1 - i}$, $[2+i]$,

c) $\frac{1}{z+i} - \frac{1+i}{z} = 1$ $\left[z_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}-2}{2}i,\ z_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}+2}{2}i\right]$.

3. Riešte binomické rovnice, riešenie znázornite v komplexnej rovine.
   a) $z^2 = i$, $\left[z_k = e^{i(\frac{\pi}{4} + k\pi)},\ k = 0, 1\right]$; b) $z^4 = -4$, $\left[z_k = \sqrt{2}e^{i(\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2})},\ k = 0, 1, 2, 3\right]$

c) $z^4 = -2 + 2\sqrt{3}i$, $\left[z_k = \sqrt{2}e^{i(\frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2})},\ k = 0, 1, 2, 3\right]$; d) $z^3 = -i$, $\left[z_k = e^{i(\frac{\pi}{2} + k\frac{2\pi}{3})},\ k = 0, 1, 2\right]$.

4. Vypočítajte čísla a) $\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^{2015}$, $[-i]$; b) $\dfrac{(1-i)(1-2i)}{3+4i}$, $[-\frac{3}{5} - \frac{1}{5}i]$ a znázornite ich v komplexnej rovine.
5. Určte $p \in \{0, 1, \ldots, 16\}$ a $q \in N$, pre ktoré je $291 = 17q + p$ $[p = 2,\ q = 17]$.
6. Určte mnohočlen $p(x) \in P(R)$ stupa najviac 2, a mnohočlen $q(x) \in P(R)$, pre ktoré platí
   $2x^4 - x^3 + x + 2 = (x^3 - x^2 + 1)q(x) + p(x)$. $\left[q(x) = 2x + 1,\ p(x) = x^2 - x + 1\right]$

Týždeň 2

1. Určte $a \in \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$, pre ktoré
   a. $35 - 128 + 15^3 \equiv a \pmod{n}$ pre $n = 2, 5, 17$, [0, 2, 1]
   b. $166^3 + 234^4 + 1126^5 \equiv a \pmod{n}$ pre $n = 2, 3, 5$, [0, 2, 3]
   c. $78^{10} + 55^{15} \equiv a \pmod{n}$ pre $n = 2, 3, 5, 7$, [1, 1, 4, 0]
2. Ukážte, že $13 \big| \left(2^{100} + 10\right)$, (pomôcka: $100 = 4 \times (3 \times 8 + 1)$, $2^4 \equiv 3 \pmod{13}$, $3^3 \equiv 1 \pmod{13}$,
   $\implies \left((2^4)^{25} + 10\right) \equiv 0 \pmod{13}$)
3. Dokážte, že pre každé $n \in N$ je $n^5 - n$ deliteľné piatimi.
4. Dokážte, že pre každé $n \in N$ je $6^{2n} - 8$ deliteľné siedmimi. (pomôcka: $6 \equiv -1 \pmod 7, 8 \equiv 1 \pmod 7$)
5. Riešte rovnice v poli Z_5 a) $x^5 + x^3 + x = 3$; [{1,3}]
   b) $x^5 + x^4 + 3x^2 + 2x + 3 = 0$ [{1,3}]
6. Vydeľte polynmy: $(2x^3 + 3x^2 + 4x + 3) : (x^2 + x + 1)$ a) nad R, b) nad Z_5.
   [a) aj b) $2x^3 + 3x^2 + 4x + 3 = (x^2 + x + 1)(2x + 1) + x + 2$]
7. Určte $\frac{1}{2} \in Z_3$, $\frac{1}{2} \in Z_5$ (prvok inverzný k 2).
8. Pomocou Euklidovho algoritmu vypočítajte prvok inverzný (vzhľadom na násobenie) k prvku a v poli Z_p.
   a) $a = 12$, $p = 37$, b) $a = 12$, $p = 41$, c) $a = 14$, $p = 97$, [a) 34, b) 24, c) 7]
9. Napíšte všetky ireducibilné polynmy z $P(Z_2)$ stupa 2,3 a 4. [$x^2 + x + 1$, $x^3 + x + 1$, $x^3 + x^2 + 1$, $x^4 + x + 1$, $x^4 + x^3 + 1$,
   $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$]
10. Rozložte na súčin ireducibilných polynmov nad poľom K polynm
    a. $x^2 + x + 1$, $K = C, R, Z_2, Z_3, Z_5$ [nad C: $(x + \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})(x + \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2})$,
    nad R, Z_2, Z_5: $x^2 + x + 1$, Z_3: $(x + 2)^2$]
    b. $x^3 + x + 1$, $K = Z_2, Z_3, Z_5$ [Z_2, Z_5: $x^3 + x + 1$, Z_3: $(x - 1)(x^2 + x + 2)$]
    c. $x^7 + x^5 + x^3 + x + 1$, $K = Z_2$ (využite výsledok príkladu 9.) [$x^7 + x^5 + x^3 + x + 1$]

Cvičenie — 3. týždeň

1. Pomocou Euklidovho algoritmu určte $a(x)$, $b(x)$ pre ktoré, $\gcd(f_1(x), f_2(x)) = a(x)f_1(x) + b(x)f_2(x)$
   a. $f_1(x) = 4x^3 - 2x^2 + 1,\ f_2(x) = 2x^2 - 3x - 2$ v $P(C)$ $[a(x) = 1,\ b(x) = -2(x+1)]$
   b. $f_1(x) = x^7 + x^5 + x^4 + x^2 + x + 1,\ f_2(x) = x^4 + x^2 + x + 1$ v $P(Z_2)$
   $[a(x) = x^2 + x + 1,\ b(x) = x^5 + x^4 + x^3 + x]$
   c. $f_1(x) = x^7 + x^5 + x^4 + x^2 + x + 1,\ f_2(x) = x^4 + x^2 + x + 1$ v $P(Z_3)$
   $[a(x) = x + 1,\ b(x) = 2x^4 + 2x^3 + 1]$
2. Pomocou Euklidovho algoritmu zistite, či má polynm $f(x)$ ireducibilný deliteľ násobnosti viac ako 1.
   a. $f(x) = x^4 + 4x^3 + 10x^2 + 12x + 9$ v $P(R)$ [áno]
   b. $f(x) = x^4 + 4x^3 + 10x^2 + 12x - 9$ v $P(R)$ [nie]
   c. $f(x) = x^7 + x^5 + x^4 + x^2 + x + 1$ v $P(Z_2)$ [nie]
   d. $f(x) = x^7 + x^5 + x^4 + x^2 + x + 1$ v $P(Z_3)$ [nie]
3. Vypočítajte
   a. $3x^3 - 2x^2 + x - 5 \pmod{x^2 + x + 1}$ v $P(R)$ [$3x$]
   b. $4x^4 + 3x^3 - 2x^2 + x - 5 \pmod{2x^2 + 1}$ v $P(R)$ [$-\frac{1}{2}x - 3$]
   c. $x^7 + x^5 + x^4 + x^2 + x + 1 \pmod{x^2 + x + 1}$ v $P(Z_2)$ [$x + 1$]
4. Pomocou Euklidovho algoritmu vypočítajte
   a. $(x)^{-1}$ v $P(Z_2)/_{(x^2+x+1)}$ [$x + 1$]
   b. $(x)^{-1}$ v $P(Z_2)/_{(x^3+x+1)}$ [$x^2 + 1$]
   c. $(x)^{-1}$ v $P(Z_2)/_{(x^3+x^2+1)}$ [$x^2 + x$]
   d. $(x^2 + x + 1)^{-1}$ v $P(Z_2)/_{(x^4+x^3+x^2+x+1)}$ [$x^3 + 1$]
5. Napíšte pole, ktoré má presne
   a. 8 prvkov, b. 9 prvkov, c. 13 prvkov. d. 18 prvkov
6. Rozšírenú maticu sústavy lineárnych rovníc upravte na redukovanú stupovitú a napíšte množinu P všetkých riešení
   a. v poli R

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - 3x_3 &= 0 \\ 3x_1 + 2x_3 &= -1 \end{aligned} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{13}{3} & \frac{2}{3} \end{array}\right), P = \{(-2a - \frac{1}{3}, \frac{2}{3} + 13a, 3a) \colon a \in R\}$$

   b. v poli Z_2

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 + x_3 + x_4 &= 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \end{aligned} \qquad P = \{(0,1,1,0);(1,1,0,0)\}$$

   c. v poli Z_2

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 + x_3 + x_4 &= 1 \\ x_2 + x_4 &= 1 \end{aligned} \qquad P = \{(1,1,0,0);(0,0,0,1);(0,1,1,0);(1,0,1,1)\}$$

   d. v poli Z_3

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &= 0 \\ 2x_1 + x_3 + x_4 &= 2 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 &= 1 \end{aligned} \qquad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right) \qquad P = \{(2,2,1,0);(1,1,2,1);(0,0,0,2)\}$$

Cvičenie — 4. týždeň

1. Riešte sústavy lineárnych rovníc (v poli Z_2)

a.
$$\begin{aligned} x_3 + x_4 &= 1 \\ x_1 + x_2 + x_4 &= 0 \\ x_1 + x_3 + x_4 &= 0 \end{aligned}$$

b.
$$\begin{aligned} x_2 + x_3 + x_4 &= 1 \\ x_1 + x_2 + x_4 &= 1 \\ x_1 + x_3 + x_4 &= 1 \end{aligned}$$

c.
$$\begin{aligned} x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 + x_2 &= 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 &= 1 \end{aligned}$$

d.
$$\begin{aligned} x_1 + x_3 &= 1 \\ x_1 + x_2 + x_4 &= 1 \\ x_3 + x_4 &= 1 \end{aligned}$$

e.
$$\begin{aligned} x_1 + x_3 &= 1 \\ x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \end{aligned}$$

f.
$$\begin{aligned} x_1 + x_3 + x_4 &= 1 \\ x_2 + x_4 &= 0 \end{aligned}$$

a) $\{(1,1,1,0);(1,0,0,1)\}$, b) $\{(1,1,1,1);(0,0,0,1)\}$, c) $\{(0,0,1,0);(1,1,0,0)\}$, d) $\{(0,1,1,0);(1,1,0,1)\}$, e) $\{(0,0,1)\}$, f) $\{(1,0,0,0);(0,1,0,1);(0,0,1,0);(1,1,1,1)\}$

2. Riešte sústavy lineárnych rovníc (v poli Z_3)

a.
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 &= 0 \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 &= 2 \\ 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 &= 2 \end{aligned}$$

b.
$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 &= 0 \\ 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 &= 0 \\ 2x_3 + 2x_4 &= 1 \end{aligned}$$

c.
$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 &= 2 \\ x_2 + 2x_3 &= 0 \\ 2x_3 + x_4 &= 0 \end{aligned}$$

d.
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 &= 0 \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 &= 2 \\ 2x_1 + x_3 + 2x_4 &= 1 \end{aligned}$$

e.
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

f.
$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 &= 2 \\ 2x_2 + x_3 &= 1 \\ x_3 + 2x_4 &= 1 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 2 \end{aligned}$$

a) $\{(2,0,1,0);(1,0,0,1);(0,0,2,2)\}$, b) $\{(0,1,2,0);(1,1,1,1);(2,1,0,2)\}$, c) $\{(1,0,0,0);(0,1,1,1);(2,2,2,2)\}$, d) $\{(1,0,0,1);(2,1,1,1);(0,2,2,1)\}$, e) $\{(2,2,1)\}$, f) $\emptyset$

3. Hermitovou metdou určte množinu všetkých celočíselných riešení sústavy

a.
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 &= 0 \\ 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 &= 2 \end{aligned}$$
$P_Z = \{(-2+a-b, 2-2a, -2+3a-b, b) \colon a, b \in \mathbb{Z}\}$

b.
$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 3x_4 &= 3 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 &= 4 \end{aligned}$$
$P_Z = \{(-6-2a-13b, b, a, 5+8b) \colon a, b \in \mathbb{Z}\}$

c. $2x_1 + 2x_2 - 4x_3 + 2x_4 - 3x_5 = 5$ $\quad P_Z = \{(10 - a + 2b - c - 3d\,,\ a, b, c, 5-2d) \colon a, b, c, d \in \mathbb{Z}\}$

d. $2x_1 + 2x_2 - 4x_3 + 2x_4 - 2x_5 = 1$ $\quad P_Z = \emptyset$

4. Rozhodnite, či je lineárne nezávislá množina $M \subset R^4$.

a. $M = \{(2,2,0,-1);(1,2,3,0);(0,1,2,-1);(3,3,1,0)\}$ [LZ]

b. $M = \{(1,2,1,-1);(1,2,3,0);(0,1,2,-1);(1,1,0,0)\}$ [LNZ]

c. $M = \{(3,2,1,0);(0,1,2,3);(1,0,1,0)\}$ [LNZ]

5. Rozhodnite, či je lineárne nezávislá množina $M \subset Z_2^5$.

a. $M = \{(1,0,1,1,0);(1,1,1,1,1);(0,1,1,1,1);(1,0,1,0,1)\}$ [LNZ]

b. $M = \{(1,0,1,1,0);(1,1,1,1,1);(0,1,1,1,1);(1,0,1,0,1);(0,0,1,0,0)\}$ [LNZ]

c. $M = \{(1,1,1,1,0);(1,1,1,0,0);(0,0,0,0,1);(0,0,0,1,0)\}$ [LZ]

6. Ukážte, že množina M funkcií $R \to R$ je lineárne nezávislá.

a. $M = \{1, x, x^2, x^3\}$

b. $M = \{\sin x, \sin 2x, \cos x, \cos 2x\}$

Cvičenie — 5. týždeň

1. Zistite, či je $M \subset R^3$ podpriestorom lineárneho priestoru $(R^3, +, \cdot)$ s obvyklým sčítaním a násobením skalárom. V prípadoch, ke je M podpriestor napíšte jeho bázu a dimenziu.

   a. $M = \{(x_1, x_2, x_3) \in R^3 \colon 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 0\}$, [$\mathcal{B} = \{(1, -2, 0); (0, 3, 1)\}$, $\dim M = 2$]

   b. $M = \{(x_1, x_2, x_3) \in R^3 \colon 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 1\}$, [nie je podpriestor]

   c. $M = \{(x_1, x_2, x_3) \in R^3 \colon 2x_1 = x_2 = -x_3\}$, [$\mathcal{B} = \{(1, 2, -2)\}$, $\dim M = 1$]

   d. $M = \{(x_1, x_2, x_3) \in R^3 \colon x_1 x_2 \geq 0\}$. [nie je podpriestor]

2. Zistite, či je $M \subset R^4$ podpriestorom lineárneho priestoru $(R^4, +, \cdot)$ s obvyklým sčítaním a násobením skalárom. V prípadoch, keď je M podpriestor napíšte jeho bázu a dimenziu.

   a. $M = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in R^4 \colon 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 0\}$, [$\mathcal{B} = \{(1, -2, 0, 0); (0, 3, 1, 0); (0, 0, 0, 1)\}$, $\dim M = 3$]

   b. $M = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in R^4 \colon 2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 0\}$,
   [$\mathcal{B} = \{(1, 1, 1, 0); (0, -1, 0, 1)\}$, $\dim M = 2$]

   c. $M = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in R^4 \colon 2x_1 = x_2, x_1 + x_3 - 2x_4 = 0\}$, [$\mathcal{B} = \{(1, 2, -1, 0); (0, 0, 2, 1)\}$, $\dim M = 2$]

   d. $M = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in R^4 \colon x_1 x_2 x_3 x_4 \geq 0\}$. [nie je podpriestor]

3. Rozhodnite, či je $\mathcal{B}$ báza lineárneho priestoru L nad poľom K. Ak je, tak určte stpec súradníc vektora $\mathbf{u}$ vzhľadom na bázu $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$.

   a. $L = R^3$, $\mathbf{b}_1 = (0, 1, -1)$, $\mathbf{b}_2 = (1, 2, -1)$, $\mathbf{b}_3 = (2, 2, 1)$; $\mathbf{u} = (4, 5, -2)$ [$(-5, 6, -1)^\top$]

   b. $L = P_2(R)$ je priestor všetkých polynmov najviac 2. stupa.
   $\mathbf{b}_1(x) = x^2 - x$, $\mathbf{b}_2(x) = x + 1$, $\mathbf{b}_3(x) = 1$; $\mathbf{u}(x) = 1 + x + x^2$ [$(1, 2, -1)^\top$]

   c. $L = Z_2^3$. $\mathbf{b}_1 = (0, 1, 1)$, $\mathbf{b}_2 = (1, 0, 1)$, $\mathbf{b}_3 = (1, 1, 0)$, $\mathbf{x} = (1, 1, 1)$ [$\mathcal{B}$ nie je báza.]

   d. $L = C^3$. $\mathbf{b}_1 = (0, 1, 1)$, $\mathbf{b}_2 = (1, 0, 1)$, $\mathbf{b}_3 = (1, 1, 0)$, $\mathbf{x} = (1, 1, 1)$ [$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})^\top$]

4. Označme $L_s(A)$ ($L_r(A)$) lineárny obal stpcov (riadkov) matice A. Určte bázu B_s (B_r) priestoru $L_s(A)$ ($L_r(A)$). Napíšte $\dim L_s(A)$ a $\dim L_r(A)$.

   a. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in R^{4\times 5}$. [$\mathcal{B}_r = \{A_{1*}, A_{2*}, A_{3*}\}, \mathcal{B}_s = \{A_{*1}, A_{*3}, A_{*5}\}$, $\dim L_r = \dim L_s = 3$]

   b. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in R^{4\times 5}$. $\left[A \sim B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} \mathcal{B}_r = \{B_{1*}, B_{2*}, B_{3*}, B_{4*}\}, \\ \mathcal{B}_s = \{A_{*1}, A_{*2}, A_{*3}, A_{*4}\} \end{matrix} \right]$

   c. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in R^{4\times 6}$. $\left[A \sim B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} \mathcal{B}_r = \{B_{1*}, B_{2*}, B_{3*}\} \\ \mathcal{B}_s = \{A_{*1}, A_{*2}, A_{*3}\} \end{matrix} \right]$

   d. $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in R^{3\times 5}$. $\left[A \sim B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} \mathcal{B}_r = \{B_{1*}, B_{2*}, B_{3*}\} \\ \mathcal{B}_s = \{A_{*1}, A_{*2}, A_{*3}\} \end{matrix} \right]$

5. $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3, \mathbf{b}_4\}$ je báza lineárneho priestoru L. nad poľom K. Napíšte dimemziu priestoru L a súradnice $\mathbf{x}_\mathcal{B}$, ak

   a. $K = R$, $\mathbf{x} = 3\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_3 + 2\mathbf{b}_4$,

   b. $K = R$, $\mathbf{x} = 2(\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2) + 3(\mathbf{b}_1 + 2\mathbf{b}_2 - \mathbf{b}_3) + 3(\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_4)$

   c. $K = Z_2$, $\mathbf{x} = \mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_3$

   [$\dim L = 4$ a) $\mathbf{x}_\mathcal{B} = (3, 0, -1, 2)^\top$, b) $\mathbf{x}_\mathcal{B} = (8, 4, -3, 3)^\top$, c) $\mathbf{x}_\mathcal{B} = (1, 0, 1, 0)^\top$]

Cvičenie — 6. týždeň

1. Rozhodnite, či je zobrazenie $T \colon R^4 \to R^3$ lineárne. Ak áno, určte bázu $\mathcal{B}$ jeho jadra a dimenzie jeho jadra a oboru hodnt.

   a. $T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4,\ 2x_1 + x_2 - x_4,\ 3x_2 - 4x_3 + x_4)$
   [$\mathcal{B} = \{(-2, 1, 0, -3); (2, 0, 1, 4)\}$, $\dim \operatorname{Ker} T = 2$, $\dim \operatorname{Ran} T = 2$

   b. $T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2x_1 + x_2 - x_3 + x_4,\ x_1 - x_2 + x_3,\ x_4)$
   [$\mathcal{B} = \{(0, 1, 1, 0)\}$, $\dim \operatorname{Ker} T = 1$, $\dim \operatorname{Ran} T = 3$

   c. $T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 x_3,\ x_2 + x_4,\ 2x_1 + x_2^2)$ nie je LO

2. Vypočítajte súradnice vektora $\mathbf{x}$ vzhľadom na usporiadanú bázu $\mathcal{B}$ priestoru R^3, resp. R^4.

   a. $\mathbf{x} = (-8\,,\,5\,,\,-4)$, $\mathcal{B} = \{(2,\,-1,\,2)\,,\,(5,\,-3,\,3)\,,\,(-1,\,0,\,-2)\}$ $[\mathbf{x}_{\mathcal{B}} = (1,-2,0)^\top]$

   b. $\mathbf{x} = (-8\,,\,5\,,\,-4)$, $\mathcal{B} = \{(2,\,5,\,-1),(-1,\,-3,\,0),(2,\,3,\,-2)\}$ $[\mathbf{x}_{\mathcal{B}} = (70,82,-33)^\top]$

   c. $\mathbf{x} = (6\,,\,-1\,,\,7\,,\,-1)$, $\mathcal{B} = \{(1,\,0,\,2,\,-1),(0,\,1,\,4,\,-2),(2,\,-1,\,0,\,1);(2,\,-1,\,-1,\,2)\}$ $[\,(2,1,1,1)^\top]$

   d. $\mathbf{x} = (-1\,,\,9\,,\,-1\,,\,3)$, $\mathcal{B} = \{(11,1,-1,-1),(-1,9,-1,3),(-1,1,11,-1);(1,3,1,9)\}$ $[\,(0,1,0,0)^\top\;(\mathbf{x} = \mathbf{b}_2)]$

3. Rozhodnite, či je zobrazenie T lineárne. V prípadoch, keď je T lineárne, napíšte jeho maticu vzhľadom na štandardné bázy ($\mathcal{E}$, presnejšie $\mathcal{E}_n$ štand. báza v R^n).

   a. $T\colon R^3 \to R^2$, $T(x_1,x_2,x_3) = (x_1 - 2x_2, x_2 + 3x_3)$

   b. $T\colon R^3 \to R^2$, $T(x_1,x_2,x_3) = (x_1 \cdot x_2, x_2 + x_3)$

   c. $T\colon R^3 \to R^3$, $T(x_1,x_2,x_3) = (2x_1 - x_2, x_3, x_1 + x_2 + x_3)$

   d. $T\colon R^3 \to R^3$, $T(x_1,x_2,x_3) = (x_1 - x_2 + x_3, 2x_2 - x_3, x_1 + 2x_2 - x_3)$

   e. $T\colon R^3 \to R^3$, $T(x_1,x_2,x_3) = (x_1x_2, 2x_2 - x_3, x_1 + 2x_2 - x_3)$

Výsledky: a. $T_{\mathcal{E}_3\mathcal{E}_2} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, c. $T_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ d. $T_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ b.,e.: T nie je lineárny operátor

Cvičenie — 7. týždeň

1. Napíšte matice lineárneho operátora $[T]_{\mathcal{E}\mathcal{E}}$, $[T]_{\mathcal{B}\mathcal{B}}$, $[T]_{\mathcal{E}\mathcal{B}}$, $[T]_{\mathcal{B}\mathcal{E}}$, Je niektorý z vektorov báz $\mathcal{B}$, $\mathcal{E}$ vlastným vektorom operátora T?

   a. $T\colon R^2 \to R^2$, $T\mathbf{x} = \mathbf{x}$, $\mathcal{E} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$, $\mathbf{e}_1 = (1,0)$, $\mathbf{e}_2 = (0,1)$; $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}$, $\mathbf{b}_1 = (-1,1)$, $\mathbf{b}_2 = (1,-2)$.

   b. $T\colon R^2 \to R^2$, $T(x_1,x_2) = (x_1 - 3x_2, 3x_1 + x_2)$, $\mathcal{E}$ a $\mathcal{B}$ sú rovnaké ako v príklade a.

   c. $T\colon R^3 \to R^3$, $T(x_1,x_2,x_3) = (x_1 - 3x_2, 3x_1 + x_2 + x_3, 0)$, $\mathcal{E} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, $\mathbf{e}_1 = (1,0,0)$, $\mathbf{e}_2 = (0,1,0)$, $\mathbf{e}_3 = (0,0,1)$; $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$, $\mathbf{b}_1 = (0,1,1)$, $\mathbf{b}_2 = (1,0,0)$, $\mathbf{b}_3 = (0,1,0)$

   d. $T\colon R^3 \to R^3$, $T(x_1,x_2,x_3) = (2x_1 - x_2 + x_3, 2x_1 + 2x_2 - x_3, x_1 + 2x_2 - x_3)$, $\mathcal{E}$ a $\mathcal{B}$ sú rovnaké ako v príklade c.

   e. $T\colon R^3 \to R^3$, $T(x_1,x_2,x_3) = (x_2 + x_3, x_1 + 2x_2 - 2x_3, x_2 - x_3)$, $\mathcal{E}$ a $\mathcal{B}$ sú rovnaké ako v príklade c.

   f. $T\colon R^3 \to R^3$, $T(x_1,x_2,x_3) = (4x_1 + x_3, -2x_1 + x_2, -2x_1 + x_3)$, $\mathcal{E}$ je rovnaká ako v príklade c., $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$, $\mathbf{b}_1 = (0,1,0)$, $\mathbf{b}_2 = (-1,2,2)$, $\mathbf{b}_3 = (-1,1,1)$.

a. $T_{\mathcal{E}\mathcal{E}} = T_{\mathcal{B}\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $T_{\mathcal{E}\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, $T_{\mathcal{B}\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

b. $T_{\mathcal{E}\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $T_{\mathcal{E}\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -5 & 5 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$, $T_{\mathcal{B}\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 10 & -15 \\ 6 & -8 \end{pmatrix}$ $T_{\mathcal{B}\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} -4 & 7 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

c. $T_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $T_{\mathcal{E}\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $T_{\mathcal{B}\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & -3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ $T_{\mathcal{B}\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

d. $T_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, $T_{\mathcal{E}\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $T_{\mathcal{B}\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $T_{\mathcal{B}\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

e. $T_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $T_{\mathcal{E}\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $T_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $T_{\mathcal{B}\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

f. $T_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $T_{\mathcal{E}\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ -6 & 0 & -3 \end{pmatrix}$, $T_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ $T_{\mathcal{B}\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

2. Pre lineárne zobrazenia z príkladu 1 určte dimenziu jadra a oboru hodnt.

   $(\dim \operatorname{Ker} T, \dim \operatorname{Ran} T)$ = 1a,b (0,2); 1c (1,2); 1d (0,3); 1e (0,3); 1f (0,3)

3. Rozhodnite, či je $\mathbf{u} \in R^{4\times 1}$ vlastný vektor matice $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. Ak áno, napíšte príslušné vlastné číslo.

   a. $\mathbf{u} = (0\;\;1\;\;0\;\;0)^\top$, $[\lambda{=}2]$ b. $\mathbf{u} = (1\;\;1\;\;-1\;\;2)^\top$, [nie je]

   c. $\mathbf{u} = (3\;\;3\;\;3\;\;3)^\top$, $[\lambda{=}4]$ d. $\mathbf{u} = (-3\;\;0\;\;3\;\;0)^\top$, [nie je]

4. Vypočítajte determinanty

a. $\begin{vmatrix} 1+i & 2 \\ i & 1-i \end{vmatrix}$ [$2-2i$], b. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ 12 & 0 & 12 \end{vmatrix}$ [0], c. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 12 \end{vmatrix}$ [-24],

d. $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 3 \end{vmatrix}$ [-4], e. $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -2 & 3 \end{vmatrix}$ [-6] f. $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 4 & 1-\lambda \end{vmatrix}$ [$(\lambda-1)^2-4$]

g. $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1-\lambda & 2-2\lambda \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix}$ [$(\lambda-2)(\lambda+2)(1-\lambda)$]

5. Vypočítajte minimálny polynm matice $A \in C^{n\times n}$

a. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ [$\lambda^2 - 2\lambda$]

b. $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ [$\lambda^2 - 2$]

c. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ [$\lambda^2 - 2\lambda$]

6. Vypočítajte minimálny polynm vektora $\mathbf{b}$ vzhľadom na maticu $A \in C^{n\times n}$

a. $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ [$\lambda^4 + \lambda^3 - \lambda^2 - \lambda - 1$]

b. $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ [λ^4]

c. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ [$-2\lambda + \lambda^2$]

7. Vypočítajte minimálny polynm matice $A \in Z_2^{n\times n}$

a. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ [λ^2]

b. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ [$\lambda^2 + 1$]

c. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ [λ^2]

8. Vypočítajte minimálny polynm vektora $\mathbf{b}$ vzhľadom na maticu $A \in Z_2^{n\times n}$

a. $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ [$\lambda^4 + \lambda^3 + \lambda^2 + \lambda + 1$]

b. $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ [λ^4]

c. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ [λ^2]

Cvičenie — 8. týždeň

1. Nájdite všetky vlastné čísla a vlastné vektory matice A

   a. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in Z_2^{3\times3}$ $[\lambda_1 = 0 \implies \mathbf{v}_1 = (0,1,1)^\top;\ \lambda_2 = 1 \implies \mathbf{v}_2 = (1,0,1)^\top]$,

   b. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \in Z_3^{3\times3}$ $\left[\lambda_1 = 1 \implies \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, 2\mathbf{v}_1;\ \lambda_2 = 2 \implies \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, 2\mathbf{v}_2\right]$

   c. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in Z_2^{3\times3}$ $\left[\lambda_1 = 0 \implies \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2;\ \lambda_2 = 1 \implies \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right]$

   d. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in Z_3^{3\times3}$ $\left[\lambda_1 = 0 \implies \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, 2\mathbf{v}_1, 2\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2, 2\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2, 2\mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2\right]$

2. Vypočítajte stopu, vlastné čísla a vlastné vektory matice $A \in C^{n\times n}$

   a. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\left[\mathrm{trace}(A) = 2; \lambda_1 = 0, \mathbf{v}_1 = p\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, p \neq 0;\ \lambda_2 = 2, \mathbf{v}_2 = p\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, p \neq 0\right]$

   b. $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\left[\mathrm{trace} = 0; \lambda_1 = \sqrt{2}, \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{2}-1 \\ 1 \end{pmatrix}; \lambda_1 = -\sqrt{2}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1-\sqrt{2} \end{pmatrix}\right]$ $[\lambda^2 - 2\lambda]$

   c. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\left[\lambda_{1,2} = 0, \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{v} = p\mathbf{v}_1 + q\mathbf{v}_2, \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \lambda_3 = 3, \mathbf{v} = p\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, p \neq 0\right]$

3. Napíšte maticu $A \in K^{n\times n}$, ktorej minimálny polynm je $f(\lambda) \in P(K)$.

   a. $K = Z_2$, $n = 4$, $f(\lambda) = \lambda^4 + \lambda^2 + \lambda + 1$ $\left[\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\right]$

   b. $K = Z_2$, $n = 4$, $f(\lambda) = \lambda^4 + \lambda^3 + \lambda + 1$ $\left[\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\right]$

   c. $K = C$, $n = 4$, $f(\lambda) = \lambda^4 - 2\lambda^3 + 3\lambda^2 - 5$ $\left[\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}\right]$

   d. $K = C$, $n = 4$, $f(\lambda) = 3\lambda^4 - 2\lambda^3 + 3\lambda^2 - 5$ $\left[\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 5/3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2/3 \end{pmatrix}\right]$

4. Rozhodnite, či je matica $A \in C^{n\times n}$ diagonalizovateľná. Ak je, tak nájdite diagonálnu maticu D a regulárnu maticu P, pre ktorú $A = PDP^{-1}$.

   a) $A = \begin{pmatrix} -14 & 12 \\ -20 & 17 \end{pmatrix}$ $P = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

   b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}$ $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

   c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

   d) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ $P = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

   e) $A = \begin{pmatrix} 19 & -9 & -6 \\ 25 & -11 & -9 \\ 17 & -9 & -4 \end{pmatrix}$ nie je

   f) $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ nie je h) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ nie je i) $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ nie je

1. Nájdite bázu $\mathcal{B}$ zloženú z reťazcov zovšeobecnených vlastných vektorov matice $A = [T]_{\mathcal{E}\mathcal{E}}$ ($\mathcal{E}$ je štandardná báza). Napíšte maticu $J = [T]_{\mathcal{B}\mathcal{B}}$ a maticu P, pre ktorú $A = PJP^{-1}$ a minimálny polynóm matice A. Pomcka: ak je v zadaní aj vektor $\mathbf{b}$, najprv nájdite $m_{A,\mathbf{b}}(\lambda)$ a $\sigma(A)$

a. $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$, $[J = J_1(0) \oplus J_1(-4)]$

b. $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$, $[J_2(-2)]$

c. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = (1,1,0)^\top$ $[J_3(2)]$

d.* $A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ 3 & 2 & 3 \\ -2 & -2 & -3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = (1,0,0)^\top$ $[J_2(-1) \oplus J_1(-1)]$

e. $A = \begin{pmatrix} 6 & -7 & 4 \\ 1 & -2 & -1 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = (2,1,1)^\top$ $[J_2(-1) \oplus J_1(10)]$

f. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = (0,1,1)^\top$ $[J_3(-1)]$

g. $A = \begin{pmatrix} 6 & -5 & -3 \\ 3 & -2 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = (1,0,1))^\top$ $[J_2(1) \oplus J_1(2)]$

h. $A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = (1,1,0)^\top$ $[J_2(0) \oplus J_1(1)]$

i.* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & -2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $[J_3(1) \oplus J_1(1)]$

j.* $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & -3 \\ 4 & -1 & 3 & -3 \end{pmatrix}$, $[J_2(0) \oplus J_2(0)]$

k. $A = \begin{pmatrix} 15 & 28 & -7 \\ -6 & -11 & 3 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$, $[J_1(1) \oplus J_1(1) \oplus J_1(2)]$

l.* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & -2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $[J_3(1) \oplus J_1(1)]$

m. $A = \begin{pmatrix} 11 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 9 & 1 & 3 \\ -1 & -1 & 11 & 1 \\ -1 & 3 & -1 & 9 \end{pmatrix}$, $[J_2(8) \oplus J_1(12) \oplus J_1(12)]$

n. $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$, $[J_1(3) \oplus J_3(2)]$

Lineárna algebra — Týždeň 10.

1. Daná je množina $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_m\} \subset R^n$. Vypočítajte navzájom ortogonálne vektory $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_m\} \subset R^n$, pre ktoré platí $\operatorname{span}\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_k\} = \operatorname{span}\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_k\}$ pre všetky $k = 1, 2, \dots, m$.
   a. $m = 2, n = 4$, $\mathbf{f}_1 = (1,1,1,1)$; $\mathbf{f}_2 = (1,0,1,0)$.
   b. $m = 3, n = 4$, $\mathbf{f}_1 = (1,1,1,1)$; $\mathbf{f}_2 = (1,0,1,0)$; $\mathbf{f}_3 = (1,1,0,0)$.
   c. $m = 3, n = 4$, $\mathbf{f}_1 = (1,0,0,1)$; $\mathbf{f}_2 = (1,0,0,0)$; $\mathbf{f}_3 = (-1,1,2,0)$.
   d. $m = 3, n = 5$, $\mathbf{f}_1 = (1,0,0,1,1)$; $\mathbf{f}_2 = (1,0,0,0,-1)$; $\mathbf{f}_3 = (-1,1,2,0,0)$.

a. $\mathbf{e}_1 = (1,1,1,1)$; $\mathbf{e}_2 = \frac{1}{2}(1,-1,1,-1)$. b. $\mathbf{e}_1 = (1,1,1,1)$; $\mathbf{e}_2 = \frac{1}{2}(1,-1,1,-1)$, $\mathbf{e}_3 = \frac{1}{2}(1,1,-1,-1)$.
c. $\mathbf{e}_1 = \mathbf{f}_1$; $\mathbf{e}_2 = \frac{1}{2}(1,0,0,-1)$, $\mathbf{e}_3 = (0,1,2,0)$, d. $\mathbf{e}_1 = \mathbf{f}_1$; $\mathbf{e}_2 = \mathbf{f}_2$, $\mathbf{e}_3 = \frac{1}{6}(-1,6,12,2,-1)$

2. Rozhodnite, či je matica P ortogonálna.
   a. $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ [nie je] b. $P = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ [áno]

3. Nájdite rovnicu priamky $y(x) = kx + q$, pre ktorú je odchýlka (súčet štvorcov) $\sum_{i=-2}^{2} |y(x_i) - y_i|^2$ najmenšia. y_i sú hodnoty namerané v bodoch x_i z tabuľky

a)

x_i	-2	-1	0	1	2
y_i	0	$0,4$	$0,5$	$0,8$	1

$y(x) = 0,24x + 0,54$

b)

x_i	-2	-1	0	1	2
y_i	-0.5	0.5	$0,5$	1	1.5

$y(x) = 0,45x + 0,6$

c)

x_i	-2	-1	0	1	2
y_i	-1	-1	$0,5$	1	$1,5$

$y(x) = 0,7x + 0,2$

4. Pre merania z príkladu 5 nájdite krivku $y(x) = ax^2 + bx + c$ tak, aby bola odchýlka $\sum_{i=-2}^{2} |y(x_i) - y_i|^2$ najmenšia.

a) $y = -0,0143x^2 + 0,24x + 0,5686$, b) $y = -0,0357x^2 + 0,45x + 0,6714$, c) $y = 0,7x + 0,2$,

Lineárna algebra — Týždeň 11–12.

1. Daná je symetrická matica $A \in R^{n\times n}$. Nájdite diagonálnu maticu D a maticu $P \in R^{n\times n}$ tak, aby $A = PDP^{\top}$.

a. $A = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$, b. $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -36 \\ 0 & -3 & 0 \\ -36 & 0 & -23 \end{pmatrix}$, c. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, d. $A = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$.

a. $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$, $P = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ 1 & -\sqrt{3} \end{pmatrix}$ b. $D = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 25 & 0 \\ 0 & 0 & -50 \end{pmatrix}$, $P = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 0 & 4 & 3 \\ 5 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 4 \end{pmatrix}$,

c. $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$, d. $D = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$

2. Napíšte maticu lineárneho operátora $T\colon R^2 \to R^2$ vzhľadom na štandardné bázy, ak T
   a) je otočenie okolo počiatku o orientovaný uhol α,
   b) zobrazí bod $A = [x, y]$ na bod súmerný s A podľa osi x,
   c) zobrazí bod $A = [x, y]$ na bod súmerný s A podľa osi $y = 2x$,
   d) zobrazí vektor $\vec{u} = [x, y]$ na jeho kolmý priemet do priamky $y = 2x$.

a) $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, c) $\begin{pmatrix} -3/5 & 4/5 \\ 4/5 & 3/5 \end{pmatrix}$, d) $\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$,

3. Napíšte maticu lineárneho operátora $T\colon R^3 \to R^3$ vzhľadom na štandardné bázy, ak T
   a) je rotácia okolo osi z o orientovaný uhol α,
   b) zobrazí bod $A = [x, y, z]$ na bod súmerný s A podľa roviny yz $(x = 0)$,
   c) zobrazí bod $A = [x, y, z]$ na bod súmerný s A podľa roviny $2x - y + 3z = 0$.

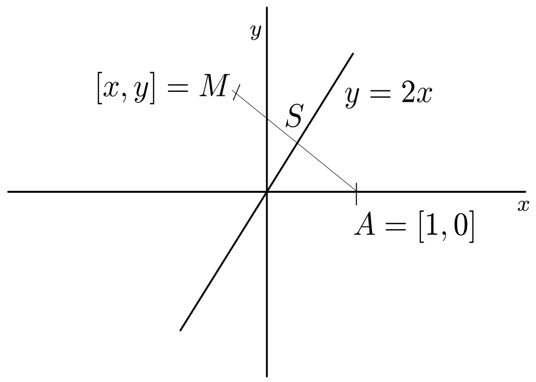
a) $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, c) $\frac{1}{7}\begin{pmatrix} 3 & 2 & -6 \\ 2 & 6 & 3 \\ -6 & 3 & -2 \end{pmatrix}$

4. Pomocou príkladu 2a) odvoďte súčtové vzorce pre $\sin(\alpha+\beta)$, $\cos(\alpha+\beta)$.

Návod na riešenie príkladu

2a) Podľa definície funkcií $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ sa otočením o uhol α okolo počiatku vektor $\mathbf{e}_1 = (1, 0)$ zobrazí na $(\cos\alpha, \sin\alpha)$ a vektor $\mathbf{e}_2 = (0, 1)$ sa zobrazí na $\left(\cos(\alpha + \frac{\pi}{2}), \sin(\alpha + \frac{\pi}{2})\right) = (-\sin\alpha, \cos\alpha)$

2c)



Označme maticu $T_{\mathcal{E}} = \mathbf{A}$.

Vypočítame súradnice $[x, y]$ bodu $M = T(1, 0)$, t.j. bodu súmerne združeného s bodom $A = [1, 0]$, $(x, y)^{\top} = \mathbf{A}_{*1}$.

Vektor $\overrightarrow{AM} = M - A = (x-1, y)$ je kolmý na smerový vektor priamky $p \equiv y = 2x$, t.j. $(M-A)\cdot(1, 2) = x - 1 + 2y = 0$.

Stred S úsečky AM leží na priamke p, $S = \frac{1}{2}(A + M) = \left[\frac{1+x}{2}, \frac{y}{2}\right] \in p \implies \frac{y}{2} = 1 + x$.

Treba teda riešiť sústavu

$$\begin{aligned} x + 2y &= 1 \\ 2x - y &= -2 \end{aligned} \implies x = -\frac{3}{5},\ y = \frac{4}{5}$$

Podobne vypočítame, že obraz bodu $B = [0, 1]$ je bod $\left[\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right]$.