LINEÁRNA ALGEBRA 2

MICHAL ZAJAC

SÚSTAVY LINEÁRNYCH ROVNÍC S CELOČÍSELNÝMI KOEFICIENTAMI

Príklad 1. Nájdite všetky celočíselné riešenia $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{Z}^4$ sústavy lineárnych rovníc, ktorej rozšírená matica je

a. $\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$.

b. $\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 6 & -6 & 12 & 1 \\ 3 & 14 & -14 & 28 & -2 \end{array}\right)$.

Riešenie.

a. Najprv použijeme Gaussovu eliminačnú metódu:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \implies P = \{(\tfrac{1}{2} - \tfrac{3}{2}p - \tfrac{1}{2}q, 1-p, p, q) \colon p, q \in \mathbb{Z}\}$$

Ak $p = 1$, $q = 1$, tak $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (\frac{1}{2} - \frac{3}{2} - \frac{1}{2}, 0, 1, 1) \in P \setminus \mathbb{Z}^4$,
ak $p = 1$, $q = 0$, tak $(x_, x_2, x_3, x_4) = (\frac{1}{2} - \frac{3}{2}, 0, 1, 0) = (-1, 0, 1, 0) \in \mathbb{Z}^4$

Teda sústava má celočíselné riešenie. Aby sme určili nutné a postačujúce podmienky (na výber parametrov p, q) na to, aby bolo riešenie $(\frac{1}{2} - \frac{3}{2}p - \frac{1}{2}q, 1-p, p, q)$ celočíselné najprv riešenie upravíme

$$(\tfrac{1}{2} - \tfrac{3}{2}p - \tfrac{1}{2}q, 1-p, p, q) = (\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}(p+q) - p, 1-p, p, q)$$

Množina všetkých celočíselných riešení danej sústavy je

$$\left\{(\tfrac{1}{2} - \tfrac{3}{2}p - \tfrac{1}{2}q, 1-p, p, q) \colon p, q \in \mathbb{Z},\ p+q \equiv 1 \pmod 2\right\}$$

b.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 6 & -6 & 12 & 1 \\ 3 & 14 & -14 & 28 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & -8 & 8 & -16 & 3 \\ 3 & 14 & -14 & 28 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & -8 & 8 & -16 & 3 \\ 0 & -10 & 10 & -20 & 7 \end{array}\right)$$

Teraz zvolíme $x_3 = p$, $x_4 = q$, $p, q \in \mathbb{Z}$ a počítame $x_2 = p - 2q - \frac{7}{10}$. Vidieť, že pre žiadne $p, q \in \mathbb{Z}$ nebude $x_2 \in \mathbb{Z}$, teda sústava nemá celočíselné riešenie.

V prípade, že má sústava jediné riešenie, t.j. ak je matica sústavy regulárna $A \in \mathbb{Z}^{n\times n}$ a pravá strana $\mathbf{b} \in \mathbb{Z}^{n\times 1}$, stačí vypočítať $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$. Budeme sa teda zaoberať len prípadom $A \in \mathbb{Z}^{m\times n}$, hodnosť $\operatorname{rank} A = m$, $m < n$ (t.j. neznámych je viac ako rovníc, a žiadnu z rovníc nemôžeme „vynulovať" pomocou ERO).

Elementárne matice a Hermitova normálna forma matice.

Definícia. Štvorcovú maticu, ktorá vznikla z jednotkovej matice I_n pomocou niektorej elemntárnej riadkovej operácie (ERO), nazývame *elementárna matica.* Tá istá matica vznikne aj pomocou stĺpcovej operácie (ESO).

Napríklad

1. $E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ vznikla z I_3 zámenou riadkov $r_1 \leftrightarrow r_2$ alebo stĺpcov $s_1 \leftrightarrow s_2$.
2. $F = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ pomocou ERO $r_1 \to r_1 + 2r_2$, resp. ESO $s_2 \to s_2 + 2s_1$.
3. $G = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ pomocou ERO $r_1 \to 3r_1$, resp. $s_1 \to 3s_1$.

Všimnime si, aký je výsledok násobenia maticou F zľava aj sprava, napr. FA pre A typu 3×2 a BF, ak B je typu 2×3

$$FA = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + 2a_{21} & a_{12} + 2a_{22} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}.$$

FA je matica, ktorá vznikne z matice A pomocou tej ERO, použitím ktorej vznikla F z jednotkovej matice. Pri násobení maticou F sprava vykonáme podobne príslušnú ESO:

$$BF = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} + 2b_{11} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} + 2b_{21} & b_{23} \end{pmatrix}.$$

Predchádzajúce tvrdenia o súvislosti ERO, resp. ESO s násobením elementárnou maticou platia pre všetky tri typy elementárnych matíc z $\mathbb{F}^{n\times n}$ a pre všetky matíce $A \in \mathbb{F}^{n\times m}$, $B \in \mathbb{F}^{k\times n}$.

Teraz ukážeme ako sa to dá využiť na určenie množiny všetkých celočíselných riešení jednej rovnice s celočíselnými koeficientami.

Príklad 2. Riešte rovnicu $2x_1 - 3x_2 + 7x_3 = 5$.

Rovnicu zapíšeme v maticovom tvare $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 7 \end{pmatrix}$, $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$:

$$A\mathbf{x} = 5\,. \tag{1}$$

Teraz maticu A rozšírime o jednotkovú maticu I_3

$$\begin{pmatrix} A \\ I_3 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{ccc} 2 & -3 & 7 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

a upravujeme pomocou takých ESO, ktoré nemenia absolútnu hodnotu determinantov štvorcových matíc (zámena stĺpcov, pričítanie niektorého stĺpca k inému stĺpcu a násobenie stĺpca číslom -1).

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 7 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim_{\substack{s_2 = s_2 + 2s_1 \\ s_3 = s_3 - 3s_1}} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim_{s_1 \leftrightarrow s_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim_{\substack{s_2 - 2s_1 \\ s_3 - s_1}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & -5 \\ 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H \\ U \end{pmatrix}$$

kde $H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $U = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Každá z piatich použitých ESO sa dá vykonať ako násobenie vhodnou elmentárnou maticou sprava. Pretože U vznikla z jednotkovej matice, je $U = IU$ súčin príslušných elementárnych matíc a $H = AU$. Všetky použité ESO bu nemenia hodnotu determinantu alebo menia iba znamienko, teda $\det U = \pm 1$

Matica $U \in \mathbb{Z}^{3\times 3}$ je teda celočíselná a regulárna a aj k nej inverzná matica je celočíselná, $U^{-1} = \frac{1}{\det U}(\operatorname{adj} U)$. Teda $\mathbf{y} \in \mathbb{Z}^{3\times 1}$ je celočíselné vtedy a len vtedy ke $U\mathbf{y}$ je celočíselné. Použijeme teraz substitúciu

$$\mathbf{x} = U\mathbf{y} \text{ a riešime rovnicu } A\mathbf{x} = AU\mathbf{y} = H\mathbf{y} = 5$$

čiže

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = y_1 + 0y_2 + 0y_3 = y_1 = 5\,,$$

ktorej množinu všetkých celočíselných riešení môžeme ľahko napísať

$$\{(5, a, b) \colon a, b \in \mathbb{Z}\}\,.$$

Každé celočíselné riešenie danej rovnice je

$$\mathbf{x} = U\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ a \\ b \end{pmatrix} = (10 - 3a - 5b, 5 - 2a - b, b)^\top;\ a, b \in \mathbb{Z}\,.$$

Rovnaký postup môžeme použiť aj na riešenie sústav viacerých rovníc s celočíselnými koeficientami. Ukážeme to na riešení príkladov 1a, b.

a. Rozšírená matica $\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$. zodpovedá sústave v maticovom tvare (maticovej rovnici)

$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, kde $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)^\top$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim_{s_1 \leftrightarrow s_4} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim_{\substack{s_2 + s_1 \\ s_3 - 2s_1 \\ s_4 - 2s_1}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & -2 \end{pmatrix} \sim_{s_3 - s_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -3 & -2 \end{pmatrix}$$

Dostali sme $AU = H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $U = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -3 & -2 \end{pmatrix}$

$H\mathbf{y} = \mathbf{b} \iff \mathbf{y} = (0, 1, a, b)^\top$, $a, b \in \mathbb{Z}$. Teda riešenie rovnice $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ je

$$\mathbf{x} = U\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ 1 - a \\ a \\ 1 - 3a - 2b \end{pmatrix}, \quad a, b \in \mathbb{Z}$$

b. $\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 6 & -6 & 12 & 1 \\ 3 & 14 & -14 & 28 & -2 \end{array}\right)$. zodpovedá maticovej rovnici
$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, kde $A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & -6 & 12 \\ 3 & 14 & -14 & 28 \end{pmatrix}$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)^\top$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 2 & 6 & -6 & 12 \\ 3 & 14 & -14 & 28 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim_{\substack{s_2 - 3s_1 \\ s_3 + 3s_1 \\ s_4 - 6s_1}} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & -5 & 10 \\ 1 & -3 & 3 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim_{\substack{s_3 + s_2 \\ s_4 - 2s_2}} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Teraz dostávame $H = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ a $H\mathbf{y} = \mathbf{b} \implies \mathbf{y} = \left(\frac{1}{2}, -\frac{7}{10}, a, b\right)$ nie je celočíselné a preto ani $\mathbf{x} = U\mathbf{y}$ nie je celočíselné. Daná sústava teda nemá celočíselné riešenie.

Poznamenajme ešte, že prvok h_{11} v matici H je najvčší spoločný deliteľ čísel v prvom riadku matice A.

Definícia. Matica $H = (h_{ij} \in \mathbb{Z}^{m \times n}$ je v Hermitovom normálnom tvare, ak
1. $n > m$ a H má hodnosť $\operatorname{rank}(H) = m$,
2. $j > i \implies h_{ij} = 0$ (t.j. H je dolná trojuholníková),
3. $h_{ii} > 0$,
4. $j < i \implies |h_{ij}| < h_{ii}$.

Matice H v predchádzajúcich príkladoch sú v Hermitovom normálnom tvare.

Popísaným postupom, by sme vždy získali z matice $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$, $\operatorname{rank}(A) = m < n$ maticu H spĺňajúcu body 1. a 2. Na určenie množiny všetkých celočíselných riešení sústavy $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ to stačí.

Veta. *Nech $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$, $n > m$ a $\operatorname{rank} A = m$. Potom existuje matica $H \in \mathbb{Z}^{m \times n}$ v Hermitovom normálnom tvare a matica $U \in \mathbb{Z}^{n \times n}$, pre ktorú platí $|\det U| = 1$ a $H = AU$.*

Poznámka. Matica $H = AU$ je zložená z bloku $H_1 \in \mathbb{Z}^{m \times m}$ (regulárna dolná trojuholníková matica) a nulovej matice $\mathbf{0}_{m \times (n-m)}$

$$H_1 = \begin{pmatrix} h_{11} & 0 & \dots & 0 \\ h_{21} & h_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{m1} & h_{m2} & \dots & h_{mm} \end{pmatrix}, \qquad H = \begin{pmatrix} H_1 & 0_{m \times (n-m)} \end{pmatrix}$$

Každé riešenie maticovej rovnice $H\mathbf{y} = \mathbf{b}$ je $\mathbf{y}^\top = (y_1, y_2, \dots, y_m, p_1, p_2, p_{n-m})$, kde $\mathbf{y}_0 = (y_1, y_2, \dots, y_m)^\top$ je jediné riešenie maticovej rovnice $H_1\mathbf{y} = \mathbf{b}$ a $p_1, \dots, p_{n-m}$ sú voľné parametre.

Riešenie $\mathbf{y}$ je celočíselné vtedy a len vtedy ke $\mathbf{y}_0$ je celočíselné a súčasne aj voľné parametre sú celočíselné.

Popísanú metódu riešenia sústavy $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ lineárnych rovníc v obore celých čísel budeme nazývať *Hermitova metóda.* Jej podstata sa dá zhrnúť:

$$\begin{pmatrix} A \\ I_n \end{pmatrix} \sim \dots \sim \begin{pmatrix} H \\ U \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} H_1 & 0_{m \times (n-m)} \end{pmatrix}, \, U \in \mathbb{Z}^{n \times n}, \, U^{-1} \in \mathbb{Z}^{n \times n}, \quad H = AU$$

kde $\sim$ znamená použitie vhodnej elementárnej stĺpcovej operácie ($s_i \leftrightarrow s_j, s_i \to s_i + ks_j$, $i \neq j, k \in \mathbb{Z}$, $s_i \to (-1) \times s_i$). Sústavu $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ potom riešime pomocou substitúcie $\mathbf{x} = U\mathbf{y}$, t.j. riešime sústavu $AU\mathbf{y} = H\mathbf{y} = \mathbf{b}$.

Príklad. Pomocou Hermitovej metódy riešte sústavy rovníc (v obore celých čísel).

1. $x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 0$, $3x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 1$
2. $x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 3$, $3x_1 - 4x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 1$

Výsledok:

1. $H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$, $P = \{(1-a-3b, 1-4b, a, -1+2a+5b) \colon a, b \in \mathbb{Z}\}$

Skúška $\begin{array}{l} L_1 = 1 - a - 3b - 2 + 8b + 3a + 1 - 2a - 5b = 0 \\ L_2 = 3 - 3a + 9b - 1 + 4b + 2a - 1 + 2a + 5b = 1 \end{array}$ $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 1$

Ešte overíme $H = AU = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

2. $H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $U = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -6 & 6 \\ 3 & -1 & -4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $P = \{(11 - 6a + 6b, 8 - 4a + 5b, a, b) \colon a, b \in \mathbb{Z}\}$

3. $2x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 1$, $3x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 3$
4. $x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 3$, $3x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 0$

Výsledok:

3. $H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $U = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, $P = \{(b, 4 + 4a - b, 4 + 3a - 2b, 3 + a - 2b) \colon a, b \in \mathbb{Z}\}$

4. $H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{y} = (3, -3/2, a, b)^\top$, $P = \emptyset$

Urobte skúšku aj v príkladoch 2, 3.

Algoritmus. Vstupnou maticou je $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$, $n > m$, $\mathrm{rank}(A) = m \geq 1$. To zaručuje, že žiadny riadok matice A nie je nulový.

1. V prvom riadku matice A nájdeme nenulový prvok s najmenšou absolútnou hodnotou a výmenou stĺpcov dosiahneme, že to bude prvok a_{11}. Ak by bolo a_{11} záporné, vynásobíme prvý stĺpec číslom -1.
2. K druhému, tretiemu až n-tému stĺpcu pripočítame taký násobok 1. stĺpca, aby $a_{1j} \in \{0, 1, \ldots, a_{11} - 1\}$ pre $\forall j = 2, 3, , \ldots, n$.

Kroky 1 a 2 opakujeme dovtedy, kým v prvom riadku budú všetky čísla okrem a_{11} nulové. Je to vlastne Euklidov algoritmus pre výpočet $\gcd(a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n})$. Teda dostaneme $a_{11} \to \gcd(a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n})$, $a_{1j} = 0$, $j = 2, 3, \ldots n$.

3. Kroky 1 a 2 aplikujeme na maticu, z ktorej vynecháme prvý riadok a prvý stĺpec (presnejšie r_1 ani s_1 už nemeníme).

Tieto kroky zopakujeme postupne pre ďalšie riadky a stĺpce až po m-tý riadok a stĺpec matice.

$$\begin{pmatrix} A \\ I_n \end{pmatrix} \sim_{\text{ESO}} \cdots \sim \begin{pmatrix} H \\ U \end{pmatrix}$$

Poznamenajme ešte, že matice H ani U nie sú určené jednoznačne, teda tvar výsledkov v príkladoch 1–4 môže byť aj iný (ale popisuje tú istú množinu P).