Lineárna algebra a LP

doc. Michal Zajac

Lineárne programovanie

Pripomeňme si najprv ako sa pomocou Gaussovej eliminačnej mmetódy riešia sústavy lineeárnych rovníc. Sústava m rovníc s n neznámymi

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &+ \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &+ \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots \qquad \vdots &\quad \vdots \qquad \vdots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 &+ \ldots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

sa "zapíše" do matice, ktorú nazývame rozšírená matica sústavy:

$$A = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

Potom postupne vykonáme vhodné elementárne riadkové (ERO) operácie, tak aby sme dostali stupňovitú maticu alebo redukovanú stupňovitú maticu B, ktorej riešenie je jednoduchšie a zhoduje sa s riešením pôvodnej sústavy. Pripomeňme, že existujú tri typy ERO ($A_{i*} = R_i$ znamená i-ty riedok matice A):

ERO1	$R_i \leftrightarrow R_j$, $i \neq j$	(vzájomná výmena riadkov)
ERO2	$\alpha R_i \to R_i$, $\alpha \neq 0$	(násobenie riadku nenulovým číslom)
ERO3	$R_i + \alpha R_j \to R_i$, $i \neq j$	(pričítanie násobku niektorého riadka k inému riadku)

Príklad.

1. Rozhodnite, ktorá z nasledujúcich matíc je (redukovaná) stupňovitá (odôvodnite).

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Riešte sústavy rovníc

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 &= 3 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 &= 3 \\ 3x_2 - x_3 - x_4 &= 1 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 &= 3 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 &= 3 \\ x_1 + 3x_2 - x_4 &= 1 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 3 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 &= 3 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 &= 1 \end{aligned}$$

Sústava lineárnych rovníc môže mať

1. práve jedno riešenie,
2. nekonečne veľa riešení,
3. žiadne riešenie.

V prípade, že existuje nekonečne veľa riešení niekedy hľadáme opotimálne riešenie. V 40-tych rokoch 20. storočia bol vyvynutý efektívny algoritmus (simplexová metóda lineárneho programovanie) na riešenie určitej triedy optimalizačných úloh. Popíšem ho najprv na nasledujúcom jednoduchom príklade.

Príklad 3.1. Spoločnosť vyrába dva druhy obvodov R1 a R2, ktoré sa skladajú zo súčiastok a prinášajú zisk ako ukazuje nasledujúca tabuľka dennej výroby:

Spotreba a zisk na 1 obvod						
obvod	počet	odpory	kondenzátory	tranzistory	cievky	zisk
R1	1	3	1	2	2	5
R2	1	4	2	3	–	9
výroba a zisk za 1 deň						
dostupná zásoba		2400	900	1600	1200	
R1	x	$3x$	x	$2x$	$2x$	$5x$
R2	y	$4y$	$2y$	$3y$	–	$9y$
spolu		$3x+4y$	$x+2y$	$2x+3y$	$2x$	$5x+9y$

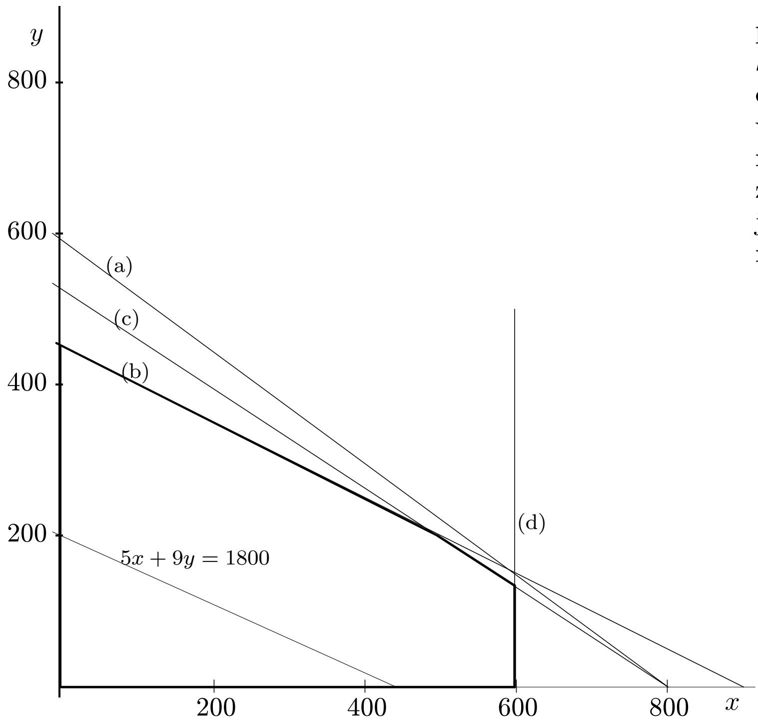
Úloha je maximalizovať denný zisk, teda nájsť

$$\max z = 5x + 9y\,, \tag{1}$$

za podmienok $x \geq 0$, $y \geq 0$ a

$$3x + 4y \leq 2400 \tag{2a}$$
$$x + 2y \leq 900 \tag{2b}$$
$$2x + 3y \leq 1600 \tag{2c}$$
$$2x \qquad \leq 1200 \tag{2d}$$

Tieto podmienky určujú „povolenú" oblasť hodnôt x, y, ktorú môžeme znázorniť v rovine. Je ohraničená priamkami $x = 0$, $y = 0$, $3x+4y = 2400$, $x+2y = 900$, $2x+3y = 1600$ a $2x = 1200$ (na obrázku je ohraničená hrubšími úsečkami).



Pre rôzne $k > 0$ dostaneme rovnobežné priamky $5x+9y = k$. Máme nájsť najväčšie k, pre ktoré priamka $5x+9y = k$ prechádza cez povolenú hrubo orámovanú oblasť (konvexný 5-uholník). Je teda vidieť, že maximum funkcie $z = 5x+9y$ bude v niektorom z vrcholov tejto oblasti. V našom prípade je to bod $x = 500$, $y = 200$ a maximálny možný zisk je 4300.

Simplexová metóda — algoritmus.

Algoritmus popíšem na riešení predchádzajúceho príkladu. Funkcia, ktorú máme maximalizovať (nazýva sa účelová funkcia) je daná vzťahom $z = 5x + 9y \iff -5x - 9y + z = 0$.

Najprv zavedieme voľné premenné r, s, t, u do vzťahov (2) a tak nerovnosti zameníme za rovnice a spolu s rovnicou pre z dostaneme sústavu:

$$-5x - 9y \qquad\qquad + z = 0 \tag{3}$$
$$3x + 4y + r \qquad\qquad = 2400 \tag{3a}$$
$$x + 2y \quad + s \qquad = 900 \tag{3b}$$
$$2x + 3y \qquad + t \quad = 1600 \tag{3c}$$
$$2x \qquad\qquad + u \quad = 1200 \tag{3d}$$

$x, y, r, s, t, u \geq 0$. Ako počiatočné riešenie vyberieme (premenné, ktoré sa nachádzajú len v jednej z rovníc, nazývame bázové):

$$\underbrace{x = y = 0}_{\text{vedľajšie premenné}} \qquad \underbrace{r = 2400\,,\ s = 900\,,\ t = 1600\,,\ u = 1200\,,\ z = 0}_{\text{bázové premenné}}$$

Zodpovedá to polohe v jednom z vrcholov prípustnej oblasti. Posun do niektorého zo susedných vrcholov znamená zväčšenie niektorej z vedľajších premenných na najväčšiu možnú hodnotu; pritom sa v riešení niektorá z bázových premenných zmení na vedľajšiu (nulovú) a naopak niektoú z nulových premenných zmeníme na bázovú. Keď prvú rovnicu zmeníme pomocou ERO3, v nej zostane bázovou premennou z, hodnota z bude stále jej pravá strana. Máme teda sústavu transformovať tak, aby sme čo najviac zväčšili pravú stranu prvej rovnice.

Vyzerá rozumnejšie čo najviac zväčšiť y a ponechať $x = 0$. Máme 4 možnosti:
(a) $y \to 600$, $r \to 0$
(b) $y \to 450$ $s \to 0$
(c) $y \to 533\frac{1}{3}$, $t \to 0$
(d) zmena y nič neovplyvní

Vyberieme z nich najmenšie y aby sme nevyšli z povolenej oblasti, z (3b) vyjadríme $y = \frac{1}{2}(900 - x - s) = 450 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}s$ a dosadí me do ostatných vzťahov:

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2}x \qquad\quad + \frac{9}{2}s \qquad\quad + z &= 4050 && (4)\\
x \quad + r - 2s \qquad\qquad &= 600 && (4a)\\
\frac{1}{2}x + y \quad + \frac{1}{2}s \qquad\qquad &= 450 && (4b)\\
\frac{1}{2}x \qquad - \frac{3}{2}s + t \qquad &= 250 && (4c)\\
2x \qquad\qquad\qquad + u \quad &= 1200 && (4d)
\end{aligned}$$

$x, y, r, s, t, u \geq 0$. A dostaneme riešenie:

$$\underbrace{x = s = 0}_{\text{vedľajšie premenné}} \qquad \underbrace{r = 600\,,\ y = 450\,,\ t = 250\,,\ u = 1200\,,\ z = 4050}_{\text{bázové premenné}}$$

a zisk sa zväčšil na $z = 4050$

Ak chceme teraz zväčšiť zisk zmeníme premennú x (zmena s by zisk zmenšila). Ak v (4c) položíme $x = 500$ dostaneme

$$\begin{aligned}
+ 3s + t \quad + z &= 4300 && (5)\\
+ r + s \ - 2t \qquad &= 100 && (5a)\\
+ y \quad + 2s - t \qquad &= 200 && (5b)\\
x \qquad - 3s + 2t \qquad &= 500 && (5c)\\
+ 6s - 4t + u \qquad &= 200 && (4d)
\end{aligned}$$

$s = t = 0 \implies x = 500\,,\ y = 200$ a $z = 4300$, čo je optimálne riešenie.

Tento algoritmus môžeme vykonávať pomocou elementárnych riadkových operácií na vhodných maticiach:

1. Začneme maticou sústavy (3)–(3d).

$$\begin{array}{c|ccccccc|c}
 & x & y & r & s & t & u & z & \\
\hline
z & -5 & -9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\
\hline
r & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2400\\
s & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 900\\
t & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1600\\
u & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1200
\end{array}$$

2. Stĺpec z v matici sa nebude meniť, preto ho v ďalších maticiach vynecháme. V riadku z nájdeme najmenšie („najviac záporné") číslo a označíme stĺpec, v ktorom sa nachádza a vypočítame pomery pravých strán a prvkov v tomto stĺpci (pritom záporné a nulové prvky ignorujeme):

$$\begin{array}{c|cccccc|c}
 & x & y & r & s & t & u & \\
\hline
z & -5 & \mathbf{-9} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
\hline
r & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2400\\
s & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 900\\
t & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1600\\
u & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1200
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c}
\\
\\
2400/3 = 800\\
900/2 = 450\\
1600/3 = 533\frac{1}{3}\\
--
\end{array}$$

Nájdeme najmenší z tých pomerov (je to 450 v riadku s):

$$\begin{array}{c|cccccc|c}
 & x & y & r & s & t & u & \\
\hline
z & -5 & \mathbf{-9} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
\hline
r & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2400\\
s & 1 & \boxed{2} & 0 & 1 & 0 & 0 & 900\\
t & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1600\\
u & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1200
\end{array}$$

Aby sme na označenom mieste dostali prvok 1 vydelíme riadok s dvoma a následne upravíme pomocou ERO tak, aby v stĺpci y boli všade okrem riadku s nuly:

$$\begin{array}{r} \\ z \\ r \\ s \\ t \\ u \end{array}\left(\begin{array}{cccccc|c} x & y & r & s & t & u & \\ \hline -5 & -9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2400 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 450 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1600 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1200 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ R_z + 9R_s \\ R_r - 4R_s \\ \\ R_t - 3R_s \\ \\ \end{array} \sim \begin{array}{r} \\ z \\ r \\ y \\ t \\ u \end{array}\left(\begin{array}{cccccc|c} x & y & r & s & t & u & \\ \hline -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{9}{2} & 0 & 0 & 4050 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & 600 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 450 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{3}{2} & 1 & 0 & 250 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1200 \end{array}\right)$$

Zopakujeme s touto maticou krok 2:

$$\begin{array}{r} \\ z \\ r \\ y \\ t \\ u \end{array}\left(\begin{array}{cccccc|c} x & y & r & s & t & u & \\ \hline -5 & -9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2400 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 450 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1600 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1200 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ R_z + 9R_s \\ R_r - 4R_s \\ \\ R_t - 3R_s \\ \\ \end{array} \sim \begin{array}{r} \\ z \\ r \\ y \\ t \\ u \end{array}\left(\begin{array}{cccccc|c} x & y & r & s & t & u & \\ \hline -\boldsymbol{\frac{1}{2}} & 0 & 0 & \frac{9}{2} & 0 & 0 & 4050 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & 600 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 450 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{3}{2} & 1 & 0 & 250 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1200 \end{array}\right) \begin{array}{r} 600/1 = 600 \\ 450/\frac{1}{2} = 900 \\ 250/\frac{1}{2} = 500 \\ 1200/2 = 600 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \\ z \\ r \\ y \\ t \\ u \end{array}\left(\begin{array}{cccccc|c} x & y & r & s & t & u & \\ \hline -\boldsymbol{\frac{1}{2}} & 0 & 0 & \frac{9}{2} & 0 & 0 & 4050 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & 600 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 450 \\ \boxed{\frac{1}{2}} & 0 & 0 & -\frac{3}{2} & 1 & 0 & 250 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1200 \end{array}\right) \sim \begin{array}{r} \\ z \\ r \\ y \\ t \\ u \end{array}\left(\begin{array}{cccccc|c} x & y & r & s & t & u & \\ \hline -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{9}{2} & 0 & 0 & 4050 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & 600 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 450 \\ 1 & 0 & 0 & -3 & 2 & 0 & 500 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1200 \end{array}\right) \sim \begin{array}{r} \\ z \\ r \\ y \\ x \\ u \end{array}\left(\begin{array}{cccccc|c} x & y & r & s & t & u & \\ \hline 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 4300 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 3 & -4 & 0 & 100 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 200 \\ 1 & 0 & 0 & -3 & 2 & 0 & 500 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & -4 & 1 & 200 \end{array}\right)$$

Odiaľ dostaneme optimálne riešenie, keď za premenné, ktorým zodpovedajú stĺpce bez vedúceho prvku niektorého riadku, teda dosadíme nulu, t.j. $s = 0$, $t = 0$ a zvyšné neznáme vypočítame $z = 4300$, $r = 100$, $y = 200$, $x = 500$, $u = 200$

Simplexová metóda — všeobecná teória.

Teraz zovšeobecníme predchádzajúce príklady:

Úlohou je nájsť maximum účelovej funkcie

$$z = c_1x_1 + \cdots + c_nx_n$$

za podmienok

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + \ldots + & a_{1n}x_n & \leq & b_1\,, \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + \ldots + & a_{2n}x_n & \leq & b_2\,, \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + \ldots + & a_{mn}x_n & \leq & b_m\,, \end{array}$$

$b_1 > 0, b_2 > 0, \ldots, b_m > 0$.

Zavedením m (teda toľko, koľko je podmienok) doplnkových premenných (nazveme ich bázové) sa úloha zmení na nájdenie maxima účelovej funkcie na množine nezáporných riešení sústavy rovníc, ktorej maticu zapíšeme do tabuľky:

	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	x_{n+1}	x_{n+2}	$\cdots$	x_{n+m}	Výsledok
z	$-c_1$	$-c_2$	$\cdots$	$-c_n$	0	0	$\cdots$	0	0
x_{n+1}	a_{11}	a_{12}	$\cdots$	a_{1n}	1	0	$\cdots$	0	b_1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
x_{n+m}	a_{m1}	a_{m2}	$\cdots$	a_{mn}	0	0	$\cdots$	1	b_m

V prvom stĺpci je označené, ktoré riadky zodpovedajú jednotlivým bázovým premenným (v priebehu výpočtu sa menia) Keď za nebázové premenné dosadíme nuly, bázové premenné sú jednoznačne určené a sú v poslednom stĺpci tabuľky. Riadok účelovej funkcie sa upravuje len tak, že k nemu pripočítame násobok iného riadku (nikdy ho nenásobíme) a preto posledné číslo v tomto riadku rovné aktuálnej hodnote účelovej funkcie.

Túto maticu (tabuľku) potom upravujeme pomocou nasledujúcich krokov:

1. V riadku z nájdeme najmenšie (najzápornejšie) číslo $-c_j$ (ak by tam boli len nezáporné čísla, maximum je dosiahnuté).
2. Pre všetky kladné a_{kj} vypočítame $b_1/a_{1j}, b_2/a_{2j}, \ldots, b_m/a_{mj}$. Nech b_i/a_{ij}je najmenšie.
3. V prvom stĺpci zameníme x_{n+i} za x_j

4. Riedok $R_i = R_{x_j}$ násobíme číslom $1/a_{ij}$
5. Pomocou elementárnych riadkových operáciíupravíme ostatné riadky, tak, že v stĺpci S_j bude $a_{ij} = 1$ a ostatné prvky budú nuly.

   Opakujeme tých 5 krokov, kým nedosiahneme optimum (v riadku z nie sú záporné čísla).

   Môžu nastať tieto problémy:

   a. Niektoré z $b_i = 0$, v tom prípade sa môže algoritmus zacykliť.

   b. Niektoré c_i zodpovedajúce nebázovej premennej je nulové. To zodpovedá prípadu nekonečne veľa optimálnych riešení (geometricky to znamená, že účelová funkcia je rovnobežná s niektorou s podmienok).

   c. Všetky a_{kj} v optimálnom stĺpci sú záporné. Znamená to, že prípstná oblasť (zodpovedajúca podmienkam) je neohraničená. V takom prípade sa treba vrátiť k pôvodnej úlohe a buď nájsť chybu v podmienkach alebo pridať novú(é) podmienku(y).

Úlohy.

3.1 Nájdite maximum $z = 5x_1 + 4x_2 + 6x_3$ za podmienok

$$x_1 \geq 0\,,\ x_2 \geq 0\,,\ x_3 \geq 0\,,$$
$$4x_1 + x_2 + x_3 \leq 19\,, \quad 3x_1 + 4x_2 + 6x_3 \leq 30\,, \quad 2x_1 + 4x_2 + x_3 \leq 25\,, \quad x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 15$$

3.2 Nájdite maximum $z = 4x_1 + 2x_2 + 4x_3$ za podmienok

$$x_1 \geq 0\,,\ x_2 \geq 0\,,\ x_3 \geq 0\,,$$
$$3x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 320\,, \quad x_1 + x_2 + x_3 \leq 100\,, \quad 2x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 200\,.$$

3.3 Firma vyrába 2 druhy chemických zlúčenín, P1, P2, ktoré sa vyrábajú z troch zložiek A,B,C; P1 v pomere A:B:C=4:2:1, P2 v pomere 3:3:1. Na týždeň je dostupných 36 000 litrov chemikálie A, 30 000 l B 12 000 l C. Zisk z produkcie 1l P1 je 1, 50 EUR, z 1l P2 1 EUR. Zistite, koľko treba vyrobiť oboch zlúčenín a koľko ostane zložiek A,B,C.

Výpadok dodávok chemikálie C spôsobí, že za týždeň bude dostupných len 8000 l C. Ako treba zmeniť produkciu, aby sa zisk znížil čo najmenej, o koľko sa znížia koľko A, B, C ostane.

3.4 Nájdite maximum $z = 6x_1 + x_2 + 2x_3 + 4x_4$ za podmienok

$$x_1 \geq 0\,,\ x_2 \geq 0\,,\ x_3 \geq 0\,,\ x_4 \geq 0\,,$$
$$2x_1 + x_2 + x_4 \leq 3\,, \quad x_1 + x_3 + x_4 \leq 4\,, \quad x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 \leq 10$$

3.5 Stolárska dielňa vyrába 2 druhy skríň. Na jednu treba 4m drevotriesky a 5 m dyhy, a 5 hod. práce a tvorí zisk 24 EUR/kus. Na druhý druh treba 5m drevotriesky, 2 m dyhy a 3 hod. práce zisk je 12 EUR/kus. Za týždeň je dostupných 400 m drevotriesky, 200 m dyhy a a 250 hod. práce. Koľko skríň jednotlivých druhov treba vyrobiť, aby bol zisk čo najväčší?

3.6 Nájdite max $z = 3x_1 + 2x_2 + 4x_3$ za podmienok

$$x_1 \geq 0\,,\ x_2 \geq 0\,,\ x_3 \geq 0\,,$$
$$x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 4\,, \quad 2x_1 + x_3 \leq 5\,, \quad 2x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 7$$

Dvojfázová simplexová metóda.

Začneme príkladom:

Nájdite $\max z = x + y$ za podmienok

$$-x + 2y \leq 6\,, \quad ,x \leq 4\,, \quad 2x + y \geq 4\,, \quad x, y \geq 0$$

V tomto prípade je prípustná oblasť štvoruholník s vrcholmi: $[2,0]$, $[4,0]$, $[4,5]$, $[\frac{2}{5}, \frac{16}{5}]$. Ľahko vidieť, že $z = x + y$ je maximálne v bode $x = 4$, $y = 5$ a $\max z = 9$.

V prípade, že všetky podmienky sú „$\leq$" je $[0, 0, \dots, 0]$ vrcholom prípustnej oblasti a volili sme ho za počiatočný v simplexovej metóde. Ak sú medzi podmienkami aj „$\geq$", prvá fáza simplexovej metódy určílen počiatočný vrchol. Popíšeme ju na našom jednoduchom príklade:

Pridáme tri nezáporné premenné r, s, t, aby sme nerovnosti v podmienkach vyjadrili v tvare sústavy:

$$\begin{aligned} -4x + 2y + r \qquad\quad &= 6 \\ x \qquad\quad + s \quad &= 4 \\ 2x + y \qquad\quad - t &= 4 \end{aligned}$$

Riešenie $x = 0$, $y = 0$, $r = 6$, $s = 4$, $t = -4$ nespĺňa podmienku, aby všetky premenné boli nezáporné (geometricky: počiatok nepatrí do prípustnej oblasti). Aby sme mohli použiť simplexovú metódu, pridáme „umelú premennú $u \geq 0$ a poslednú rovnicu zameníme za

$$2x + y - t + u = 4$$

a máme prípustné riešenie $x = y = t = 0$, $r = 6$, $s = 4$, $u = 4$. Je to však riešenie inej úlohy a umelú premennú z nej potrebujeme najprv eliminovať, preto pridáme ešte aj umelú účelovú funkciu

$$z' = -u$$

Prvou fázou simplexovej metódy bude eliminácia premennej u ($\min z'$ pre nezáporné u je práve v $u = 0$): Do simplexovej tabuľky napíšeme teda obe účelové funkcie:

	x	y	r	s	t	u	
z	-1	-1	0	0	0	0	0
z'	0	0	0	0	0	1	0
r	-1	2	1	0	0	0	6
s	1	0	0	1	0	0	4
u	2	1	0	0	-1	1	4

Teraz upravujeme tabuľku tak, aby sme maximalizovali z', pričom do eliminácie zahŕňame aj riadok z (ale, čo urobiť sa rozhodujeme podľa riadku z'). V riadku z' je prvok (z', u) nenulový, hoci je u bázová premenná, preto ako prvý krok odčítame $R_{z'} - R_u$:

	x	y	r	s	t	u	
z	-1	-1	0	0	0	0	0
z'	-2	-1	0	0	1	0	-4
r	-1	2	1	0	0	0	6
s	1	0	0	1	0	0	4
u	2	1	0	0	-1	1	4

Vyberieme „najzápornejšie číslo v $R_{z'}$ (-2 v stĺpci S_x), vypočítame podiely pravých strán a kladných čísel v stĺpci S_x, najmenší je $4/2 = 2$ v R_u:

	x	y	r	s	t	u	
z	-1	-1	0	0	0	0	0
z'	-2	-1	0	0	1	0	-4
r	-1	2	1	0	0	0	6
s	1	0	0	1	0	0	4
u	$\boxed{2}$	1	0	0	-1	1	4

Pomocou ERO: $R_u/2$, $R_s - R_u$, … :

	x	y	r	s	t	u	
z	0	$-\frac{1}{2}$	0	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	2
z'	0	0	0	0	0	1	0
r	0	$\frac{5}{2}$	1	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	8
s	0	$-\frac{1}{2}$	0	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	2
x	1	$\frac{1}{2}$	0	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	2

Teraz je (podľa riedku $R_{z'}$) hodnota umelej premennej $u = 0$ aj $z' = 0$ a $R_{z'}$ aj S_u môžeme odstrániť. Zostane štandardná simplexová tabuľka, ktorú upravíme simplexovým algoritmom:

	x	y	r	s	t	
z	0	$-\frac{1}{2}$	0	0	$-\frac{1}{2}$	2
r	0	$\boxed{5/2}$	1	0	$-\frac{1}{2}$	8
s	0	$-\frac{1}{2}$	0	1	$\frac{1}{2}$	2
x	1	$\frac{1}{2}$	0	0	$-\frac{1}{2}$	2

$\rightarrow$

	x	y	r	s	t	
z	0	$-\frac{1}{2}$	0	0	$-\frac{1}{2}$	2
y	0	1	$\frac{2}{5}$	0	$-\frac{1}{5}$	$\frac{16}{5}$
s	0	$-\frac{1}{2}$	0	1	$\frac{1}{2}$	2
x	1	$\frac{1}{2}$	0	0	$-\frac{1}{2}$	2

$\rightarrow$

	x	y	r	s	t	
z	0	0	$\frac{1}{5}$	0	$-\frac{3}{5}$	$\frac{18}{5}$
y	0	1	$\frac{2}{5}$	0	$-\frac{1}{5}$	$\frac{16}{5}$
s	0	0	$\frac{1}{5}$	1	$\boxed{2/5}$	$\frac{18}{5}$
x	1	0	$-\frac{1}{5}$	0	$-\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$

$\rightarrow$

	x	y	r	s	t	
z	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	0	9
y	0	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	5
t	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}$	1	9
x	1	0	0	1	0	4

A dostali sme optimálne riešenie $z = 9$ pre $x = 4$, $y = 5$.

Všeobecná dvojfázová stratégia.

1. fáza

Ak je v p podmienkach nerovnosť $\geq$, zavedieme p umelých premenných $u_1, u_2, \dots u_p$ a umelú účelovú funkciu $z' = -u_1 - u_2 - \cdots - u_p$. V simplexovej tabuľke

1. odčítame riadky $u_1, u_2, \dots, u_p$ od riadku z'
2. Použijeme štandardnú simplexovú metódu, na elimináciu umelých premenných aj umelej účelovej funkcie. Do eliminácie zahŕňame aj riadok účelovej funkcie z.

2. fáza

3. Z tabuľky odstránime stĺpce umelých premenných a riadok umelej účelovej funkcie z' a s novou tabuľkou pokračujeme štandardnou simplexovou metódou.

Úlohy.

3.7 Určte $\max z = 4x_1 + \frac{1}{2}x_2 + x_3$ za podmienok

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 \geq 2\,, \quad 2x_1 + x_2 + x_3 \leq 5\,, \quad x_1 \geq 0\,,\ x_2 \geq 0\,,\ x_3 \geq 0\,.$$

3.8 Z troch druhov rúd treba vyrobiť 100 kg zliatiny železa, olova a medi. Zliatina musí obsahovať najmenej 20 % železa, 25 % olova, ale najviac 48 % medi. V tabuľke sú obsahy kovov a náklady na tavenie jednotlivých rúd:

ruda	A	B	C
železo (%)	70	60	0
olovo (%)	20	10	40
meď (%)	10	30	60
náklady (EUR/kg)	3000	2000	1000

Nájdite zloženie zliatiny, ktoré minimalizuje náklady (Na elimináciu podmienky danej rovnosťou tiež treba zaviesť umelú premennú, na minimalizáciu účelovej funkcie $z = 3000x_1 + 2000x_2 + 1000x_3$ sa maximalizuje $-z = -3000x_1 - 2000x_2 - 1000x_3$, takže konečný výsledok v riadku z tabuľky bude záporný). Pri vhodnom označení premenných bude počiatočná tabuľka:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	
z	3000	2000	1000	0	0	0	0	0	0	0
z'	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0
x_7	0.7	0.6	0	-1	0	0	1	0	0	20
x_8	0.2	0.1	0.4	0	-1	0	0	1	0	25
x_6	0.1	0.3	0.6	0	0	1	0	0	0	48
x_9	1	1	1	0	0	0	0	0	1	100

3.9 Pomocou simplexovej metódy minimalizujte $f = 10x_1 + x_2$ za podmienok

$$4x_1 + x_2 \leq 32\,, \quad 2x_1 + x_2 \geq 12\,, \quad 2x_1 - x_2 \leq 4\,, \quad -2x_1 + x_2 \leq 8$$

Znázornite prípustnú oblasť a v každom cykle prvej aj druhej fázy napíšte, v ktorom bode sa počíta účelová funkcia.