Kvadratické plochy

Definícia. Množina všetkých bodov v R^3, ktorých súradnice (x, y, z) vo zvolenom pravouhlom pravotočivom súradnicovom systéme spĺňajú rovnicu

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_1x + 2a_2y + 2a_3z + a_0 = 0 \tag{1}$$

sa nazýva kvadratická plocha (kvadrika). Symetrická matica

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_2 \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_0 \end{pmatrix}$$

sa nazýva matica tejto kvadratickej plochy a rovnica (1) má maticový tvar

$$(\,x \quad y \quad z \quad 1\,)\,M\,(\,x \quad y \quad z \quad 1\,)^\top = 0\,.$$

Rovnicu (1) môžeme preformulovať na

$$(\,x \quad y \quad z\,)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + 2\,(\,x \quad y \quad z\,)\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + a_0 = 0$$

Označíme $\mathbf{u} = (\,x \quad y \quad z\,)$, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$, $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ Rovnica (1) má potom tvar

$$\underbrace{\mathbf{u}A\mathbf{u}^\top}_{\text{kvadratická časť}} \quad +2\mathbf{u}\mathbf{a} + a_0 = 0$$

Uvedieme teraz rovnice niektorých typov kvadratických plôch K v prípade, že v matici M je $ia_{12} = a_{13} = a_{23} = 0$ (t.j. v rovnici (1) nie sú zmiešané kvadratické členy.

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0$ prázdna množina,

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$ elipsoid,

$a = b = c = r \implies x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ guľová plocha so stredom v počiatku a polomerom r,

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$ jednodielny hyperboloid, ak $a = b$, tak je rotačný

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0$ dvojdielny hyperboloid, ak $a = b$, tak je rotačný

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 2z = 0$ eliptický paraboloid, pre $a = b$ rotačný

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 2z = 0$ hyperbolický paraboloid

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$ eliptická kužeľová plocha, ak $a = b$, tak je rotačná

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ eliptická valcová plocha, ak $a = b$, tak je rotačná

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ hyperbolická valcová plocha,

$x^2 - 2ay = 0$ parabolická valcová plocha, Ak sa v rovnici kvadratickej plochy nevyskytujú zmiešané kvadratické členy, t.j. ak $a_{12} = a_{13} = a_{23} = 0$, tak sa dá upraviť na niektorý z predchádzajúcich tvarov pomocou doplnenia na úplný štvorec, ukážeme to na príklade

$$\begin{aligned}
4x^2 + y^2 - 4z^2 - 8x + 2y + 8z + 5 &= 0 \\
4x^2 - 8x + y^2 + 2y - 4z^2 + 8z + 5 &= 0 \\
4(x^2 - 2x) + (y^2 + 2y) - 4(z^2 - 2z) + 5 &= 0 \\
4(x^2 - 2x + 1) - 4 + (y^2 + 2y + 1) - 1 - 4(z^2 - 2z + 1) + 4 + 5 &= 0 \\
4(x-1)^2 + (y+1)^2 - 4(z-1)^2 + 4 &= 0 \\
(x-1)^2 + \frac{(y+1)^2}{4} - (z-1)^2 + 1 &= 0 \\
\frac{x_1^2}{1} + \frac{y_1^2}{4} - \frac{z_1^2}{1} + 1 &= 0 \qquad \text{dvojdielny hyperboloid}
\end{aligned}$$

Tvar kvadratickej plochy sme uirčili pomocou posunutia súradnicových osí, resp. substitúciou $x_1 = x - 1$, $y_1 = y + 1$, $z_1 = z - 1$.

Ak nie je matica $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$ diagonálna, typ kvadratickeju plochy sa dá určiť pomocou vhodnej substitúcie (otočenia súradnicovej sústavy) založenej na nasledujúcej vete, ktorú uvedieme bez dôkazu (presahuje možnosti predmetu LA1 a bude súčassťou predmetu LA2).

Veta. *Nech $A = A^\top \in R^{n\times n}$ potom existuje regulárna matica $Q \in R^{n\times n}$ taká, že*
(i) $Q^{-1} = Q^\top$
(ii) *$A = QDQ^\top$, kde D je diagonálna matica, t.j. $D = (d_{ij})$, $i \neq j \implies d_{ij} = 0$.*

Pre $n = 3$ vzťah $Q^{-1} = Q^\top$ znamená, že stĺpce matica Q aj riadky matice Q sú navzájom kolmé vektory dĺžky 1. Matice, pre ktoré $Q^{-1} = Q^\top$ sa nazývajú *ortogonálne*. Tvrdenie (ii) sa pomocou (i) dá prepísať na tvar $Q^\top AQ = Q^\top QDQ^\top Q = D$.

Na záver ešte uvedieme príklad použitia predchádzajúcej vety.

Príklad. Pomocou substitúcie $P = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \end{pmatrix} Q$, kde $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$ určte typ kvadratickej plochy $2x^2 + y^2 + z^2 + 2yz + 4x - 2 = 0$.

Riešenie. Najprv kvadratickú časť rovnice danej kvadratickej plochy prepíšeme do maticového tvaru $PAP^\top$, kde $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$:

$$PAP^\top + 4x - 2 = 0 \tag{2}$$

Presvedčíme sa, že je matica Q ortogonálna

$$QQ^\top = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a určíme diagonálnu maticu D, pre ktorú $A = QDQ^\top$

$$D = Q^\top AQ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Pomocou substitúcie dostaneme z rovnice (2):

$$\begin{aligned}
PAP^\top + 4x - 2 &= 0 \\
P(QDQ^\top)P^\top + \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^\top - 2 &= 0 \\
(PQ)D(PQ)^\top + \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \end{pmatrix} QQ^\top P^\top - 2 &= 0 \\
(PQ)D(PQ)^\top + \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \end{pmatrix} Q(PQ)^\top - 2 &= 0 \\
\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \end{pmatrix} D \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} - 2 &= 0
\end{aligned}$$

V nových súradniciach dostaneme

$$\begin{aligned}
2x_1^2 + 2y_1^2 + 4x_1 - 2 &= 0 \\
2(x_1^2 + 2x_1 + 1) + 2y_1^2 - 4 &= 0 \\
(x_1 + 1)^2 + y_1^2 &= 2 \qquad \text{rotačná valcová plocha}
\end{aligned}$$