Reálne symetrické matice

Skalárny súčin v R^n.

Pripomeniem, že pre vektory $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3), \mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$ platí

1. dĺžka vektora $\mathbf{u}$ je $\|\mathbf{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$,
2. ak sú oba vektory nenulové a zvierajú (neorientovaný) uhol $\alpha \in \langle 0, \pi \rangle$, tak je ich skalárny súčin
   $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \|u\| \|v\| \cos \alpha = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$.

Skalárny súčin má veľmi užitočné zovšeobecnenia na mnohé lineárne priestory nad poľom R aj C. Tu sa budeme zaoberať len skalárnym súčinom v priestore R^n:

Definícia. Nech $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n), \mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in R^n$. Potom sa číslo

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n$$

nazýva *skalárny súčin* vektorov $\mathbf{x}, \mathbf{y}$, číslo

$$\sqrt{(\mathbf{x}, \mathbf{x})} = \|\mathbf{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$$

sa nazýva norma vektora $\mathbf{x}$,
hovoríme, že vektory $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ sú ortogonálne (na seba kolmé, $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$), ak $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$.

Skalárny súčin môžeme vyjadriť pomocou maticového násobenia

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}^\top = \mathbf{y} \cdot \mathbf{x}^\top .$$

Ako prvú aplikáciu zovšeobecníme tvrdenie, že najbližším bodom v rovine ρ k bodu $\mathbf{a} \notin \rho$ je kolmý priemet bodu A do roviny ρ:

Veta. *Nech* $\{0\} \neq M \neq R^n$ *je netriviálny podpriestor priestoru* R^n *a* $\mathbf{a} \in R^n \setminus M$. *Potom existuje Bod* $\mathbf{b} = \mathbf{a}_{\min} \in M$, *ktorý má najmenšiu vzdialenosť* $\|\mathbf{a}_{\min} - \mathbf{a}\|$ *od bodu* $\mathbf{a}$. *Ak* $M = \operatorname{span}\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_k\}$, *tak*

$$\mathbf{b} = \mathbf{a}_{\min} \iff (\mathbf{a} - \mathbf{b}) \perp \mathbf{b}_i \,, \forall i = 1, 2, \ldots, k \,.$$

Dôkaz. Dokážeme tu len, tvrdenie o minimálnosti normy, nech $\mathbf{b} \in M$, $(\mathbf{a} - \mathbf{b}) \perp \mathbf{b}_i \ \forall i$:
Ak $\mathbf{u} \in M$, tak $\mathbf{u} - \mathbf{b} \in M \implies \mathbf{u} - \mathbf{b} \perp (\mathbf{a} - \mathbf{b})$, t.j. $(\mathbf{u} - \mathbf{b}, \mathbf{b} - \mathbf{a}) = 0$. Potom

$$(\mathbf{u}-\mathbf{a}, \mathbf{u}-\mathbf{a}) = (\mathbf{u}-\mathbf{b}+\mathbf{b}-\mathbf{a}, \mathbf{u}-\mathbf{b}+\mathbf{b}-\mathbf{a}) = (\mathbf{u}-\mathbf{b}, \mathbf{u}-\mathbf{b}) + 2\underbrace{(\mathbf{u}-\mathbf{b}, \mathbf{b}-\mathbf{a})}_{0} + (\mathbf{b}-\mathbf{a}, \mathbf{b}-\mathbf{a})$$

Teda $\|\mathbf{u} - \mathbf{a}\|^2 = \|\mathbf{u} - \mathbf{b}\|^2 + \|\mathbf{b} - \mathbf{a}\|^2 \geq \|\mathbf{b} - \mathbf{a}\|^2$.

Použili sme očividné tvrdenie: Ak $\mathbf{u} \perp \mathbf{b}_i \,, \forall i = 1, 2, \ldots, k$, tak $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$ pre $\forall\, \mathbf{v} \in \operatorname{span}\{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_k\}$.

Metóda najmenších štvorcov..

Meraním sa získali hodnoty veličiny $y = y(x)$:

x_i	-2	-1	0	1	2
y_i	0	$0,4$	$0,5$	$0,8$	1

Úlohou je nájsť rovnicu priamky $p \equiv y = kx + q$ tak, aby bola „čo najbližšie" k nameraným hodnotám, t.j. aby bola minimálna odchýlka $\sum\limits_{i=-2}^{2} |y(x_i) - y_i|^2$, t.j. druhá mocnina normy rozdielu namenarej pätice a pätice bodov na hľadanej priamke:

$$\left\| \left(y_{-2}, y_{-1}, y_0, y_1, y_2\right) - \left(-2k + q, -k + q, 0k + q, k + q, 2k + q\right) \right\|$$

Riešenie hľadáme ako keby sme hľadali priamku na ktorej ležia namerané body, t.j. neznáme čísla k, q spĺňajú rovnice:

$$\begin{aligned} -2k + q &= 0 \\ -k + q &= 0,4 \\ q &= 0,5 \\ k + q &= 0,8 \\ 2k + q &= 1 \end{aligned}$$

Napíšeme túto sústavu v maticovom tvare:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} k \\ q \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0,4 \\ 0,5 \\ 0,8 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad A\mathbf{x} = \mathbf{b}\,.$$

Rovnica $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ nemá riešenie, ak by ale riešenie existovalo, tak by vyhovovalo aj rovnici

$$A^\top A\mathbf{x} = A^\top \mathbf{b}\,, \text{ ktorá riešenie má.}$$

Vypočítame

$$A^\top A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix},$$

$$A^\top \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0,4 \\ 0,5 \\ 0,8 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,4 \\ 2,7 \end{pmatrix}$$

Riešime teda sústavu

$$\begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,4 \\ 2,7 \end{pmatrix} \implies \begin{matrix} k = 0,24 \\ q = 0,54\,. \end{matrix} \implies \underline{p \equiv y = 0,24x + 0,54}$$

$$A^\top \left(A \begin{pmatrix} k \\ q \end{pmatrix} - \mathbf{b} \right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff (kA_{*1} + qA_{*2} - \mathbf{b}) \perp \operatorname{span}\{A_{*1}, A_{*2}\}$$

Gramm-Schmidtov ortogonalizačný proces.

Štandardná báza $\mathcal{E} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\} \subset R^n$ má nasledovnú vlastnosť

Definícia. Množina vektorov $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_k\} \subset R^n$ sa nazýva *ortogonálna*, ak

$$(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = 0, \text{ ak } i \neq j\,; \quad (\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_i) \neq 0 \quad \forall i, j \in \{1, 2, \dots, k\}\,.$$

Ortogonálna množina sa nazýva *ortonormálna*, ak, navyše, $\|\mathbf{e}_i\| = 1$ for $\forall\, i$.

Ak $k = n$, tak je táto množina *ortogonálna* (*ortonormálna*) *báza* priestoru R^n.

Ľahko sa ukáže, že ortogonálna množina je lineárne nezávislá, naopak každú lineárne nezávislú množinu môžeme „ortogonalizovať" pomocou nasledujúceho algoritmu:

Veta (Gramm-Schmidtov ortogonalizačný proces). *Nech $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_k\} \subset R^n$ je lineárne nezávislá množina. Potom existujú vektory $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \dots, \mathbf{g}_k$, ktoré spĺňajú*

(i) $\operatorname{span}\{\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \dots \mathbf{g}_m\} = \operatorname{span}\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_m\}$ *pre* $\forall\ m = 1, 2, \dots, k$

(ii) *Množina $\{\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \dots, \mathbf{g}_k\}$ je ortogonálna.*

Dôkaz. Hľadané ortogonálne vektory sa dajú vypočítať rekurzívne

$$\begin{aligned}
\mathbf{g}_1 &= \mathbf{f}_1\\
\mathbf{g}_2 &= \mathbf{f}_2 - \frac{(\mathbf{f}_2, \mathbf{g}_1)}{(\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_1)}\mathbf{g}_1\\
\mathbf{g}_3 &= \mathbf{f}_3 - \frac{(\mathbf{f}_3, \mathbf{g}_1)}{(\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_1)}\mathbf{g}_1 - \frac{(\mathbf{f}_3, \mathbf{g}_2)}{(\mathbf{g}_2, \mathbf{g}_2)}\mathbf{g}_2\\
&\vdots\\
\mathbf{g}_k &= \mathbf{f}_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{(\mathbf{f}_k, \mathbf{g}_i)}{(\mathbf{g}_i, \mathbf{g}_i)}\mathbf{g}_i
\end{aligned}$$

Ak ešte položíme $\mathbf{e}_i = \frac{1}{\|\mathbf{g}_i\|}\mathbf{g}_i$, dostaneme ortonormálnu množinu.

Príklad. Použite Gramm-Schmidtov algoritmus na
$\mathbf{f}_1 = (1, 0, 0, 1)$, $\mathbf{f}_2 = (1, 0, 0, 0)$, $\mathbf{f}_3 = (-1, 1, 2, 0)$.

Riešenie.
$\mathbf{g}_1 = (1, 0, 0, 1)$, $(\mathbf{f}_2, \mathbf{g}_1) = 1$, $(\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_1) = \|\mathbf{g}_1\|^2 = 2$
$\Longrightarrow\ \mathbf{g}_2 = \mathbf{f}_2 - \frac{1}{2}\mathbf{g}_1 = (1, 0, 0, 0) - \frac{1}{2}(1, 0, 0, 1)$
$\mathbf{g}_2 = \left(\frac{1}{2}, 0, 0, -\frac{1}{2}\right)$
$(\mathbf{f}_3, \mathbf{g}_1) = -1 + 0 + 0 + 0 = -1$, $(\mathbf{f}_3, \mathbf{g}_2) = \Big((-1, 1, 2, 0), \left(\frac{1}{2}, 0, 0, -\frac{1}{2}\right)\Big) = -\frac{1}{2}$
$(\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_1) = \|\mathbf{g}_1\|^2 = 2$, $(\mathbf{g}_2, \mathbf{g}_2) = \|\mathbf{g}_2\|^2 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$, dosaden9m do vzorca z predch. vety:
$\mathbf{g}_3 = (-1, 1, 2, 0) + \frac{1}{2}(1, 0, 0, 1) + \left(\frac{1}{2}, 0, 0, -\frac{1}{2}\right) = (0, 1, 2, 0)$
$\underline{\mathbf{g}_1 = (1, 0, 0, 1), \mathbf{g}_2 = \frac{1}{2}(1, 0, 0, -1), \mathbf{g}_3 = (0, 1, 2, 0)}$

Kvadratické plochy a symetrické matice.

Kvadratickou plochou v R^3 sa nazýva množina bodov $[x, y, z]$, ktoré spĺňajú rovnicu

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_1x + 2a_2y + 2a_3z + a_0 = 0$$

Táto rovnica sa dá napísať pomocou matice

$$\begin{pmatrix} x & y & z & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_1\\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_2\\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_3\\ a_1 & a_2 & a_3 & a_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x\\ y\\ z\\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

Teda kvadratická plocha je určená symetrickou maticou

$$A = A^\top = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_1\\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_2\\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_3\\ a_1 & a_2 & a_3 & a_0 \end{pmatrix}$$

Na určenie tvaru kvadratickej plochy je dôležité najmä poznať vlastnosti kvadratickej časti matice A, t.j. matice, ktorá vznikne z A vynechaním A_{4*} a A_{*4}.

Klasifikáciou kvadratických plôch sa tu zaoberať nebudeme, uvdiem len príklad:

Ak $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \end{pmatrix}$, tak $(\,x \quad y \quad z \quad 1\,)\,A\,(\,x \quad y \quad z \quad 1\,)^\top = 0$ je rovnica guľovej plochy so stredom v počiatku súradníc a polomerom r.

Ak by sme vedeli vhodnou zmenou bázy zmeniť túto maticu na diagonálnu, vedeli by sme lepšie určiť tvar tejto kvadratickej plochy. Vhodná zmena bázy je taká, ktorá nemení dĺžku vektorov ani uhly medzi vektormi, teda iba vektory otáča. Stačí na to, aby zachovávala skalárny súčin, t.j. $(\mathbf{u},\mathbf{v}) = (P\mathbf{u}, P\mathbf{v})$. To bude zaručené ak matica zmeny bázy je ortogonálna v zmysle nasledujúcej definície.

Definícia. Matica $P \in R^{n\times n}$ sa nazýva *ortogonálna*, ak jej stĺpce tvoria ortonormálnu bázu.

Veta. *Matica $P \in R^{n\times n}$ je ortogonálna vtedy a len vtedy, ak $P^{-1} = P^\top$, ekvivalentne vtedy a len vtedy, keď aj jej riadky tvoria ortonormálnu množinu.*

Veta. *Ak je matica $P \in R^{n\times n}$ ortogonálna a $\mathbf{u},\mathbf{v} \in R^{n\times 1}$, tak*

$$(\mathbf{u},\mathbf{v}) = (P\mathbf{u}, P\mathbf{v})\,.$$

Dôkaz. Pripomenieme, že ak je definovaný súčin matíc AB, tak $(AB)^\top = B^\top A^\top$. Okrem toho si všimnime, žel $\mathbf{x}^\top\mathbf{y} \in R^{1\times 1}\ \forall\,\mathbf{x},\mathbf{y} \in R^{n\times 1}$ a preto $(\mathbf{x}^\top\mathbf{y})^\top = \mathbf{x}^\top\mathbf{y}$, z toho vyplýva

$$(P\mathbf{u}, P\mathbf{v}) = (P\mathbf{v})^\top P\mathbf{u} = \Big((P\mathbf{v})^\top P\mathbf{u}\Big)^\top = (P\mathbf{u})^\top\Big((P\mathbf{v})^\top\Big)^\top = \mathbf{u}^\top P^\top P\mathbf{v} = \mathbf{u}^\top \underbrace{(P^\top P)}_{I}\,\mathbf{v} = \mathbf{u}^\top\mathbf{v}$$

Teda dostávame $(P\mathbf{u}, P\mathbf{v}) = \mathbf{u}^\top\mathbf{v} = (\mathbf{u},\mathbf{v})$.

Definícia. Matice $A, B \in R^{n\times n}$ sa nazývajú *unitárne podobné*, ak existuje ortogonálna matica P, pre ktorú platí

$$A = PBP^{-1} = PBP^\top.$$

Veta. *Ak $A = A^\top \in R^{n\times n}$ (t.j. A je reálna symetrická matica), tak*

1. *Všetky vlastné čísla matice A sú reálne.*
2. *Ak $\lambda_1 \neq \lambda_2$ sú vlastné čísla matice A a $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ sú príslušné vlastné vektory, tak $\mathbf{v}_1 \perp \mathbf{v}_2$*
3. *Ak $\mathbf{v} \neq 0$, $\lambda \in \sigma(A)$ a $(A-\lambda I)^2\mathbf{v} = \mathbf{0}$, tak aj $(A-\lambda I)\mathbf{v} = \mathbf{0}$, t.j. všetky zovšeobecnené vlastné vektory matice A sú aj jej vlastné vektory.*
4. *Matica A je unitárne podobná diagonálnej matici.*

Dôkaz. Dokážem druhé, tretie a štvrté tvrdenie. Pre ľubovoľné $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ platí

$$(A\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = \mathbf{v}_2^\top A\mathbf{v}_1 = (\mathbf{v}_2^\top A\mathbf{v}_1)^\top = \mathbf{v}_1^\top A^\top(\mathbf{v}_2^\top)^\top = \mathbf{v}_1^\top A\mathbf{v}_2 = (A\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1)\,.$$

Ak $A\mathbf{v}_1 = \lambda_1\mathbf{v}_1$, $A\mathbf{v}_2 = \lambda_2\mathbf{v}_2$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$, tak odtiaľ dostaneme

$$(A\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = (\mathbf{v}_1, A\mathbf{v}_2) \implies \lambda_1(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = \lambda_2(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) \implies (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = 0$$

Tým je dokázané tvrdenie 2. Pretože aj $A - \lambda I$ je symetrická matica

$$(A-\lambda I)^2\mathbf{v} = \mathbf{0} \implies \|(A-\lambda I)\mathbf{v}\|^2 = ((A-\lambda I)\mathbf{v}, (A-\lambda I)\mathbf{v}) = (\mathbf{v}, (A-\lambda I)^2\mathbf{v}) = 0$$

t.j. $\|(A-\lambda I)\mathbf{v}\| = 0$ a teda $(A-\lambda I)\mathbf{v} = \mathbf{0}$

Z tretieho tvrdenia vyplýva, že Jordanov tvar matice A je diagonálna matica D, $A = PDP^{-1}$. Stĺpce matice P sú vlastné vektory matice A. Pre rôzne vlastné čísla sú aj navzájom kolmé a pre viacnásobné vlastné čísla použijeme Gramm-Schmidtov proces na ich ortogonalizáciu. Nakoniec, keď nahradíme P_{*i} násobkom $\frac{1}{\|P_{*i}\|}P_{*i}$ vznikne matica ktorej stĺpce tvoria ortonormálnu množinu (teda P je ortogonálna) a platí $A = PDP^\top$.

Príklad. $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ Nájdite diagonálnu maticu D a ortogonálnu maticu P, pre ktorú $A = PDP^\top$, urobte skúšku správnosti.

Riešenie. Najprv nájdeme vlastné čísla:

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & 2 \\ 2 & 2-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 2-\lambda \end{vmatrix}_{\substack{R_2-R_1 \\ R_3-R_1}} = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & 2 \\ \lambda & -\lambda & 0 \\ \lambda & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}_{S_1+S_2+S_3}$$
$$= \lambda^2 \begin{vmatrix} 6-\lambda & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \lambda^2(6-\lambda) \implies \sigma(A) = (0.0.6)\,.$$

Teraz nájdeme vlastné vektory, dva lineárne nezávislé k vlastnému číslu 0, tretí k vlastnému číslu 6:

$\lambda = 0$ $\mathbf{v}_1 = (-1,0,1)^\top$, $\mathbf{v}_2 = (-1,1,0)^\top$ a pomocou Gramm-Schmidtovho ortogonalizačného procesu nájdeme dva iné vlastné vektory $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$ tak, aby $\mathbf{f}_1 \perp \mathbf{f}_2$, t.j.
$\mathbf{f}_1 = \mathbf{v}_1$, $\mathbf{f}_2 = \mathbf{v}_2 - \dfrac{(\mathbf{v}_2, \mathbf{f}_1)}{(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_1)}\mathbf{f}_1 = (-1,1,0)^\top - \frac{1}{2}(-1,0,1)^\top = -\frac{1}{2}(1,-2,1)^\top$ Po vydelení normou vektorov $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$, dostaneme prvé dva stĺpce matice P. Tretí stĺpec bude vlastný vektor patriaci k $\lambda = 6$:

$$\begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix}_{R_3+R_1+R_2} \sim \begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{R_1-R_2} \sim \begin{pmatrix} -6 & 6 & 0 \\ 2 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \implies \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Aj $\mathbf{v}_3$ vydelíme normou $\|\mathbf{v}_3\| = \sqrt{3}$ a dostaneme maticu P

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

Skúška:

$$PDP^\top = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{6} & 2/\sqrt{6} & -1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6/\sqrt{3} \\ 0 & 0 & 6/\sqrt{3} \\ 0 & 0 & 6/\sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{6} & 2/\sqrt{6} & -1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}\,.$$