Maticové polynómy a Jordanov kanonický tvar štvorcovej matice

Pre pole K a štvorcovú maticu $A \in K^{n\times n}$ definujeme mocniny
$A^0 = I_n$ (jednotková matica), $A^{n+1} = A^n A$ $(n \geq 0)$ a pre ľubovoľný polynóm $f(\lambda) \in P(K)$, $f(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + \cdots + a_n\lambda^n$ potom definujeme maticový polynóm $f(A) = a_0 I + a_1 A + \cdots + a_n A^n$. Je zrejmé, že pre dva polynómy $f, g \in P(K)$ platí $f(A)g(A) = g(A)f(A)$.

Definícia. Nech $A \in K^{n\times n}$. Nenulový polynóm $f(\lambda)$ najmenšieho stupňa, pre ktorý $f(A) = 0_{n\times n}$ sa nazýva *minimálny polynóm* matice A a označovať ho budeme $m_A(\lambda)$.

Veta. *Pre každú štvorcovú maticu $A \in K^{n\times n}$ existuje minimálny polynóm $m_A(\lambda)$.*

Dôkaz. Zrejme stačí ukázať, že existuje nenulový polynóm f, pre ktorý $f(A) = 0$. To je jednoduchý dôsledok faktu, že $K^{n\times n}$ je n^2-dimenzionálny lineárny priestor, a teda (n^2+1)-prvková množina

$$\{I, A, A^2, \ldots A^{n^2}\}$$

je lineárne závislá. To súčasne dokazuje, že minimálny polynóm matice A je najviac stupňa n^2.

Veta. *Ak $A \in K^{n\times n}$, $0 \neq f(\lambda) \in P(K)$ a platí $f(A) = 0_{n\times n}$, tak $m_A(\lambda)$ je deliteľom $f(\lambda)$.*

Dôkaz. Stupeň $\deg f \geq \deg m_A$, preto delením $f(\lambda) : m_A(\lambda)$ dostaneme

$$\exists g(\lambda), h(\lambda)\colon f(\lambda) = m_A(\lambda)g(\lambda) + h(\lambda), \quad \deg h(\lambda) < \deg m_A(\lambda)$$

Dosadením matice A do tejto rovnosti dostaneme $0 = f(A) = m_A(A)g(A) + h(A) = h(A)$, teda aj $h(A) = 0$. Preto $\deg h(\lambda) < \deg m_A(\lambda) \implies h(\lambda) = 0$ (keby bol polynóm h nenulový, m_A by nebol minimálny polynóm matice A), t.j. $m_A | f$.

Príklad. $K = Z_2$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $f(\lambda) = \lambda^2 + \lambda + 1$. Vypočítame $f(A)$.

$A^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$,
$f(A) = A^0 + A + A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_{2\times 2}$. Pretože $\lambda^2 + \lambda + 1$ je ireducibilný polynóm, je to súčasne minimálny polynóm matice A.

Teraz ešte definujeme ďalšie dva polynómy spojené s maticou $A \in K^{n\times n}$.

Definícia. Nech $A \in K^{n\times n}$, $\mathbf{b} \in K^{n\times 1}$.
1. Nenulový polynóm najmenšieho stupňa, pre ktorý platí $f(A)\mathbf{b} = 0_{n\times 1}$ sa nazýva *minimálny polynóm vektora* $\mathbf{b}$ *vzhľadom na maticu* A, označovať ho budeme $m_{A,\mathbf{b}}(\lambda)$.
2. $p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ sa nazýva charakteristický polynóm matice A.

Poznamenajme ešte bez dôkazu, že $\deg m_{A,\mathbf{b}}(\lambda) \leq n$ a $\deg p_A(\lambda) = n$. Navyše, pomocou matice adjungovanej k matici $(A - \lambda I)$, presnejšie vzťahu $(A - \lambda I)\operatorname{adj}(A - \lambda I) = \det(A - \lambda I) I_n$ sa dá ukázať, že $p_A(A) = 0_{n\times n}$, t.j., že charakteristický polynóm matice A anuluje maticu A (tvrdenie známe ako Caley-Hamiltonova veta). Z toho potom vyplýva, že

$$m_{A,\mathbf{b}}(\lambda) | m_A(\lambda) | p_A(\lambda) \text{ a všetky tri polynómy majú stupeň najviac } n\,.$$

Príklad. Nech $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in Z_2^{3\times 3}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Určte $m_{A,\mathbf{b}}(\lambda)$, $m_A(\lambda)$ a $p_A(\lambda)$.

Riešenie.
$m_{A,\mathbf{b}}$: Najprv vypočítame $\mathbf{b}$, $A\mathbf{b}$, $A^2\mathbf{b} = A(A\mathbf{b})$, $A^3\mathbf{b} = A(A^2\mathbf{b})$ a nájdeme čísla $a_0, a_1, a_2, a_3 \in Z_2$ tak, aby $a_0\mathbf{b} + a_1 A\mathbf{b} + a_2 A^2\mathbf{b} + a_3 A^3\mathbf{b} = 0_{3\times 1}$. Teda pre polynóm $f(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + a_3\lambda^3$ platí $f(A)\mathbf{b} = 0_{3\times 1}$. To znamená, že riešime homogénnu sústavu lineárnych rovníc, ktorej matica je (maticu A si napíšeme vľavo od matice sústavy, aby sa nám ľahšie počítali stĺpce $A\mathbf{b}$, $A(A\mathbf{b})$ ...)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{cccc} \mathbf{b} & A\mathbf{b} & A^2\mathbf{b} & A^3\mathbf{b} \\ \hline \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim_{R_3+R_1} \begin{array}{cccc} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Pivoty sú v stĺpcoch a_0, a_1, Môžeme voliť a_2, a_3. Aby sme dostali nenulový polynóm čo najmenšieho stupňna, volíme $a_3 = 0$, $a_2 = 1$ potom $a_1 = a_0 = 1$, teda $m_{A,\mathbf{b}}(\lambda) = \lambda^2 + \lambda + 1$

Príklad. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in Z_2^{3\times 3}$, Určte $m_A(\lambda)$ a $p_A(\lambda)$.

Riešenie.
$\deg m_A \leq 3 \implies m_A(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + a_3\lambda^3 \in P(Z_2)$ (minimálny polynóm je podľa Caley-Hamiltonovej vety najviac stupňa 3). Hľadáme teda $a_0, a_1, a_2, a_3 \in Z_2$ tak aby $a_0 I + a_1 A + a_2 A^2 + a_3 A^3 = 0$.

$$A^0 = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ A^1 = A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},\ A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$a_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + a_1 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} + a_3 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} (a_0 + a_1 + a_3) & (a_1 + a_2 + a_3) & a_1 \\ a_1 & (a_0 + a_1 + a_3) & (a_2 + a_3) \\ (a_2 + a_3) & a_1 & (a_0 + a_1 + a_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Teda riešime sústavu (9 rovníc s neznámymi a_0, a_1, a_2, a_3, pre každú pozíciu v matici jedna rovnica)

$$\begin{array}{lr} 11 & a_0 + a_1 + a_3 = 0 \\ 21 & a_1 = 0 \\ 31 & a_2 + a_3 = 0 \\ 12 & a_1 + a_2 + a_3 = 0 \\ 22 & a_0 + a_1 + a_3 = 0 \\ 32 & a_1 = 0 \\ 13 & a_1 = 0 \\ 23 & a_2 + a_3 = 0 \\ 33 & a_0 + a_1 + a_2 = 0 \end{array} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{r} a_0 + a_1 + a_3 = 0 \\ a_1 = 0 \\ a_2 + a_3 = 0 \end{array}$$

Zvolíme $a_3 = 1$ ($a_3 = 0 \implies a_2 = a_1 = a_0 = 0$, dostali by sme nulový polynóm), potom odspodu počítame $a_2 + a_3 = 0 \implies a_2 = a_3 = 1$, $a_1 = 0$, $a_0 = 1$, t.j. $m_A(\lambda) = \lambda^3 + \lambda^2 + 1$
$\deg p_A(\lambda) = 3$ a $m_A | p_A \implies p_A(\lambda) = m_A(\lambda) = \lambda^3 + \lambda^2 + 1$

Riešme ešte opačnú úlohu ako sa k danému nenulovému $f(x) \in P(K)$ dá nájsť matica $A_f \in K^{n\times n}$, ktorej minimálny polynóm je $f(x)$.

Veta. *Nech $f(\lambda) = a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots a_1\lambda + a_0 \in P(K)$, $a_n \neq 0$. Potom je $f(\lambda)$ minimálny polynóm matice*

$$A_f = A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -a_0/a_n \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -a_1/a_n \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -a_2/a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -a_{n-1}/a_n \end{pmatrix} \in K^{n\times n}.$$

Dôkaz. Stačí ukázať, že $f(\lambda) = m_{A,\mathbf{b}}(\lambda)$ pre $\mathbf{b} = (1, 0, 0, \dots, 0)^\top$ (skúste to ukázať pre $n = 4$), $A_f^3\mathbf{b}$, $A_f^4\mathbf{b}$) a použiť vzťah $\deg m_{A,\mathbf{b}} \leq \deg m_A \leq n$. V našom prípade $m_{A,\mathbf{b}} = f$ má stupeň n a teda sa rovná minimálnemu polynómu matice A_f, ktorá sa nazýva matica pridružená k polynómu f (companion matrix of f).

Dokážeme to pre $n = 4$, t.j. pre $f(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + a_3\lambda^3 + a_4\lambda^4$, $a_4 \neq 0$;

$$A_f = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -a_0/a_4 \\ 1 & 0 & 0 & -a_1/a_4 \\ 0 & 1 & 0 & -a_2/a_4 \\ 0 & 0 & 1 & -a_3/a_4 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \; A_f\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \; A_f^2\mathbf{b}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \; A_f^3\mathbf{b}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \; A_f^4\mathbf{b}) = \begin{pmatrix} -a_0/a_4 \\ -a_1/a_4 \\ -a_2/a_4 \\ -a_3/a_4 \end{pmatrix}$$

$$a_0\mathbf{b} + a_1A\mathbf{b} + a_2A^2\mathbf{b} + a_3A^3\mathbf{b} + a_4A^4\mathbf{b} =$$

$$a_0\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + a_1\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + a_2\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + a_3\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + a_4\begin{pmatrix} -a_0/a_4 \\ -a_1/a_4 \\ -a_2/a_4 \\ -a_3/a_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Príklad. Nájdite maticu $A \in Z_3^{4\times 4}$, ktorej minimálny polynóm je $f(\lambda) = 2\lambda^4 + \lambda^2 + 2\lambda$

Riešenie. Použijeme predchádzajúcu vetu $a_0 = 0$, $a_1 = 2$, $a_2 = 1$, $a_3 = 0$, $a_4 = 2$:

$$\begin{array}{c} 1/2 = 2 \pmod 3 \\ -1 = 2 \pmod 3, \\ -2 = 1 \pmod 3 \end{array} \implies A_f = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -a_0/a_4 \\ 1 & 0 & 0 & -a_1/a_4 \\ 0 & 1 & 0 & -a_2/a_4 \\ 0 & 0 & 1 & -a_3/a_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -0/2 \\ 1 & 0 & 0 & -2/2 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -0/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Vlastné čísla matíc, diagonalizovateľné matice a Jordanov kanonický tvar

V tejto časti budeme sa zaoberať väčšinou operátormi z $C^{n\times 1}$ do $C^{n\times 1}$, Stotožňujeme ich s maticami typu $n \times n$. Pritom, ak nie je uvedená báza, vzhľadom na ktorú je matica skonštruovaná, bude to matica operátora T vzhľadom na štandardnú bázu.

Pripomeňme, že štandardnou $\mathcal{E}$ sa nazýva báza pozostávajúca s prvkov

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_1 &= (1,0,0,\dots,0,0)\\ \mathbf{e}_2 &= (0,1,0,\dots,0,0)\\ &\vdots\\ \mathbf{e}_n &= (0,0,0,\dots,0,1)\end{aligned}$$

Ak $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots \mathbf{b}_n\}$ je báza C^n, tak každý prvok $\mathbf{x} \in C^n$ sa dá jednoznačne napísať v tvare $\mathbf{x} = x_1\mathbf{b}_1 + x_2\mathbf{b}_2 + \dots x_n\mathbf{b}_n$. n-ticu čísel $(x_1, x_2, \dots, x_n)^\top$ potom nazývame súradnice vektora $\mathbf{x}$ vzhľadom k báze $\mathcal{B}$.

Pripomeňme ešte, že maticou operátora $T\colon C^n \to C^n$ vzhľadom k bázam $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots \mathbf{b}_n\}$ a $\mathcal{D}$ nazývame maticu $[T]_{\mathcal{B}\mathcal{D}}$, ktorej j-ty stĺpec tvoria súradnice vektora $T\mathbf{b}_j$ vzhľadom na bázu $\mathcal{D}$, t.j.

$$A = [T]_{\mathcal{B}\mathcal{D}} \iff A_{*j} = [Tb_j]_{\mathcal{D}}\,, \quad j = 1,2,\dots,n\,,$$
$$[T\mathbf{x}]_{\mathcal{D}} = [T]_{\mathcal{B}\mathcal{D}}[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}\,.$$

Úlohou, ktorá sa nazýva spektrálny rozklad operátora T v C^n je nájsť bázu $\mathcal{B}$ pri ktorej je matica $T_{\mathcal{B}}$ operátora T „najjednoduchšia". Ak v štandardnej báze $\mathcal{E}$ má operátor maticu A a v nejakej inej báze $\mathcal{B}$ maticu J, tak platí

$$A = PJP^{-1}\,, \quad \text{kde} \quad P = [I]_{\mathcal{B}\mathcal{E}}\,, \quad (I\mathbf{x} = \mathbf{x})\,.$$

Matice A a J sa potom nazývajú *podobné matice.*

Vlastné čísla a vlastné vektorov LO $T\colon L \to L$ (štvorcových matíc).

Definícia. Nech $(L, +, \cdot)$ je lineárny priestor nad poľom K. Nenulový vektor $\mathbf{x} \in L$ sa nazýva vlastný vektor lineárneho operátora $T\colon L \to L$, ak $\exists\lambda \in K$, pre ktoré $T\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$. Číslo λ sa nazýva vlastné číslo operátora T.

Podpriestor $E_\lambda = \ker(T - \lambda I) = \{\mathbf{x} \in L\colon T\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}\}$ sa nazýva vlastný podpriestor oprátora T prislúchajúci k vlastnému číslu λ.

Špeciálne, ak je operátor daný štvorcovou maticou $A \in K^{n\times n}$, tak sa nenulový vektor $\mathbf{x} \in K^{n\times 1}$, pre ktorý existuje $\lambda \in K$ také, že $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ nazýva vlastný vektor matice A patriaci k vlastnému číslu λ.

Cvičenie.
1. Rozhodnite, či je vektor $\mathbf{x}$ vlastným vektorom operátora (matice) A.
a. $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, b. $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
2. Nájdite všetky vlastné vektory a vlastné čísla matice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in Z_2^{3\times 3}$

Riešenie. 1a. $A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} = -1 \cdot \mathbf{x}$, t.j. $\mathbf{x}$ je vlastný vektor s vlastným číslom $\lambda = -1$.

1b. $A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$. Ak by $\exists\lambda$, pre ktoré $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$, t.j. $\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda \end{pmatrix}$, tak $-2 = \lambda$ a súčasne $0 = \lambda$, teda $\mathbf{x}$ nie je vlastný vektor.

2. Priestor $Z_2^{3\times 1}$ je konečný, má presne 7 nenulových prvkov. Stačí vypočítať $A\mathbf{x}$ pre všetkých 7 možností:

$$A\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \quad A\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \quad A\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \quad A\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},$$
$$A\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \quad A\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \quad A\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},$$

Teda jediným vlastným vektorom je $\mathbf{e}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\end{pmatrix}^\top$ (s vlstným číslom $\lambda=1$.

Rýchlejšie riešenie je zisťovať, či k číslam $0,1$ vieme nájsť vlastný vektor, t.j. či má sústava $A\mathbf{x}=0$ (pre $\lambda=0$) alebo $A\mathbf{x}=\mathbf{x}$ (pre $\lambda=1$) nenulové riešenie ($A\mathbf{x}=\lambda\mathbf{x} \iff (A-\lambda I)\mathbf{x}=\mathbf{0}$):

$$\lambda=0: \begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\1&1&1\end{pmatrix} \sim_{R_3+R_1} \begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} \text{ teda } A\mathbf{x}=0 \implies \mathbf{x}=\mathbf{0}\ 0 \text{ nie je vlastné číslo}$$

$$\lambda=1: A-I=A+I=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\1&1&0\end{pmatrix} \text{ teda } \mathbf{x}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \text{ je vlastný vektor pre } \lambda=1.$$

Cvičenie. Určte všetky vlastné čísla $\lambda\in Z_3$ a vlastné vektory matice $A=\begin{pmatrix}0&1&2\\1&1&2\\1&2&0\end{pmatrix}\in Z_3^{3\times 3}$

Riešenie. $\lambda=0$, $A-\lambda I=A=\begin{pmatrix}0&1&2\\1&1&2\\1&2&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&2\\0&1&2\\1&2&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&2\\0&1&2\\0&1&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&2\\0&1&2\\0&0&2\end{pmatrix}$
Sústava $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$ má len nulové riešenie, $\lambda=0$ nie je vlastné číslo
$\lambda=1$, $A-\lambda I=A+2I=\begin{pmatrix}2&1&2\\1&0&2\\1&2&2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&2\\2&1&2\\1&2&2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&1\\0&2&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}\implies$
$\lambda=1$ nie je vlastné číslo
$\lambda=2$, $A-\lambda I=A+I=\begin{pmatrix}1&1&2\\1&2&2\\1&2&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&2\\0&1&0\\0&1&2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&2\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$, ani $\lambda=2$ nie je vlastné číslo.

Veta. *Nech $A\in K^{n\times n}$ a I_n je jednotková matica z $K^{n\times n}$. Číslo $\lambda\in K$ je vlastným číslom matice A vtedy a len vtedy, keď* $\det(A-\lambda I_n)=0$, *t.j. keď je λ koreňom charakteristického polynómu matice A.*

Dôkaz. Stačí si uvedomiť, že

$$A\mathbf{x}=\lambda\mathbf{x} \iff (A-\lambda I_n)\mathbf{x}=0_{n\times 1}$$

a že sústava lineárnych rovníc $(A-\lambda I_n)\mathbf{x}=0_{n\times 1}$ má nenulové riešenie práve vtedy, keď je matica $(A-\lambda I_n)$ singulárna, t.j. jej determinant je nulový.

Teraz budeme pracovať len s maticami s komplexnými prvkami (niektoré tvrdenia ale platia aj pre iné polia).

Veta. *Nech $A \in C^{n\times n}$.*
1. *$\lambda \in C$ je vlastné číslo matice A, vtedy a len vtedy, keď je koreňom jej charakteristického polynómu.*
2. *$\lambda \in C$ je vlastné číslo matice A, vtedy a len vtedy, keď je koreňom jej minimálneho polynómu.*
3. *(Cayley-Hamiltonova veta) Ak $p(\lambda)$ je charakteristický polynóm matice A, tak $p(A) = 0_{n\times n}$.*
4. *Minimálny polynóm matice $A \in C^{n\times n}$ je deliteľom jej charakteristického polynómu.*

Dôkaz. Tvrdenie 1 sme už dokázali. Dokážeme ešte tvrdenie 2.

Ak $m(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)^{k_1}(\lambda-\lambda_2)^{k_2}\cdots(\lambda-\lambda_m)^{k_m}$ je kanonický rozklad minimálneho polynómu matice A, tak

$$0_{n\times n} = m(A) = (A-\lambda_1 I)^{k_1}(A-\lambda_2 I)^{k_2}\cdots(A-\lambda_m I)^{k_m}$$

Pre každé $i = 1,2,\ldots,m$ je polynóm $f(\lambda) = m(\lambda)/(\lambda-\lambda_i)$ menšieho stupňa ako $m(\lambda)$, preto $B = f(A) \neq 0_{n\times n}$. Teda ak by bola matica $(A-\lambda_i I)$ regulárna, tak by

$$0_{n\times n} = (A-\lambda_i I)B \implies (A-\lambda_i I)^{-1}0_{n\times n} = B = 0\,.$$

Matica B je ale nenulová, preto neexistuje $(A-\lambda_i I)^{-1}$, teda λ_i je vlastné číslo matice A. Ukázali sme, že každý koreň minimálneho polynómu je vlastné číslo matice A.

Naopak, ak by vlastné číslo μ matice A nebolo koreňom minimálneho polynómu $m(\lambda)$ matice A, tak $m(\lambda) = (\lambda-\mu)g(\lambda) + r$, kde $r = m(\mu) \neq 0$. Potom by pre vlastný vektor **a** patriaci k vlastnému číslu μ platilo

$$m(A)\mathbf{b} = [(A-\mu I)g(A) + rI]\mathbf{b} = g(A)((A-\mu I)\mathbf{b} + r\mathbf{b} = r\mathbf{b} \neq 0_{n\times 1}\,.$$

To je v spore s tým, že $m(A) = 0_{n\times n}$.

Poznamenajme ešte, že z predchádzajúcej vety vyplýva, že korene minimálneho polynómu a charakteristického polynómu matice A sú tie isté, v minimálnom polynóme môžu mať menšiu násobnosť.

Množina všetkých vlastných čísel matice $A \in C^{n\times n}$ sa nazýva spektrum matice A a označuje sa $\sigma(A)$. Presnejšie budeme písať $\sigma(A) = \{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n\}$, kde každé číslo opakujem toľkokrát, koľko je jeho násobnosť ako koreňa charakteristického polynómu matice A.

Súčet vlastných vektorov matice $A \in C^{n\times n}$, $\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n$ sa dá určiť ľahko bez znalosti jednotlivých vlastných čísel.

Definícia. Nech $A = (a_{ij}) \in C^{n\times n}$. stopou matice nazývame súčet jeho prvkov na hlavnej diagonále, t.j. $\operatorname{trace}(A) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ii}$.

Veta. *Nech $A \in C_{n\times n}$ má vlastné čísla $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$ ($\sigma(A) = \{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n\}$), potom platí*

$$\operatorname{trace} A = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\,.$$

Jordanov tvar štvorcovej matice

Definícia. Matice $A, B \in C^{n\times n}$ sa nazývajú podobné, ak $\exists$ regulárna matica P, pre ktorú $B = P^{-1}AP$.

Príklad. Daná je matica $A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -4 \\ 8 & -11 & -8 \\ -8 & 8 & 5 \end{pmatrix}$. Považujme A za maticu lineárneho operátora $T\colon C^3 \to C^3$ vzhľadom na štandardnú báazu $\mathcal{E}$. Matica A má vlastné čísla $\lambda_1 = 1$, $\lambda_{2,3} = -3$. Pre túto maticu vieme nájsť bázu $C^{3\times 1}$ pozostávajúcu z jej vlastných vektorov: $\mathcal{D} = \{\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \mathbf{d}_3\}$, $\mathbf{d}_1 = (1, 2, -2)^\top$ ($A\mathbf{d}_1 = \mathbf{d}_1$), $\mathbf{d}_2 = (1, 1, 0)^\top$, $\mathbf{d}_3 = (1, 0, 1)^\top$ ($A\mathbf{d}_2 = -3d_2$, $A\mathbf{d}_3 = -3d_3$).

$$[T\mathbf{d}_1]_{\mathcal{D}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ [T\mathbf{d}_2]_{\mathcal{D}} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}, \ [T\mathbf{d}_3]_{\mathcal{D}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \text{ a } [T]_{\mathcal{D}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Zoberme $P = (\, \mathbf{d}_1 \quad \mathbf{d}_2 \quad \mathbf{d}_3 \,) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ($P_{*1} = \mathbf{d}_1$, $P_{*2} = \mathbf{d}_2$, $P_{*3} = \mathbf{d}_3$), teda $P = [I]_{\mathcal{D}\mathcal{E}}$, preto $P^{-1} = [I]_{\mathcal{E}\mathcal{D}}$. A ľahko sa presvedčíme, že

$$[T]_{\mathcal{D}} = [I]_{\mathcal{E}\mathcal{D}}[T]_{\mathcal{E}}[I]_{\mathcal{D}\mathcal{E}} = P^{-1}AP =$$
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix} AP = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 6 & -9 & -6 \\ -6 & 6 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Teda matica operátora T vzhľadom na bázu pozostávajúcu z vlastných čísel operátora T je diagonálna. Pritom matica A je podobná tejto diagonálnej matici.

Veta. *Matice $A, B \in C^{n\times n}$ sú podobné práve vtedy, keď sú maticami toho istého operátora $T\colon C^n \to C^n$, t.j. keď existujú bázy $\mathcal{B}$, $\mathcal{D}$ také, že $A = [T]_{\mathcal{B}}$, $B = [T]_{\mathcal{D}}$.*

Ako urobiť dôkaz vidieť z predchádzajúceho príkladu: Ak sú matice podobné $A = PBP^{-1}$, tak matica A je vzhľadom na štandardnú bázu maticou toho istého operátora ako matica B vzhľadom na bázu $\{P_{*1}, P_{*2}, \dots, P_{*n}\}$. Naopak, ak $A = [T]_{\mathcal{B}}$, $B = [T]_{\mathcal{D}}$, tak pre $P = [I]_{\mathcal{B}\mathcal{D}}$ platí $A = P^{-1}BP$.

Vidieť, že na nájdenie bázy, pri ktorej je matica daného operátora jednoduchá je potrebné poznať štruktúru jeho vlastných vektorov. V predchádzajúcom príklade sme našli bázu pozostávajúcu z vlastných vektorov. Pre maticu $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ sa nám to nepodarí. Má len jedno vlastné číslo a k nemu príslušný vlastný podpriestor je len jednorozmerný.

Definícia. Matica $A \in C^{n\times n}$ sa nazýva diagonalizovateľná, ak je podobná diagonálnej matici.

Zrejme platí nasledujúce tvrdenie:

Veta. *Matica $A \in C^{n\times n}$ je diagonalizovateľná práve vtedy, keď existuje báza priestoru $C^{n\times 1}$ pozostávajúca z vlastných vektorov matice A.*

Všeobecne matica $A \in C^{n\times n}$ nemusí byť podobná diagonálnej matici. Teda vždy sa nepodarí nájsť bázu zloženú z vlastných vektorov matice A. Pre každú maticu $A \in C^{n\times n}$ existuje báza zložená zo zovšeobecnených vlastných vektorov matice A:

Definícia. Nech $A \in C^{n\times n}$, $\lambda \in \sigma(A)$. Nenulový vektor $\mathbf{x} \in C^{n\times 1}$ sa nazýva zovšeobecnený vlastný vektor matice A, ak $\exists k \in N$, pre, ktoré $(A - \lambda I)^k \mathbf{x} = 0_{n\times 1}$. Množina

$$E = \{\mathbf{e}, (A - \lambda I)\mathbf{e}, \dots, (A - \lambda I)^{k-1}\mathbf{e}\}\,, \text{ pre ktorú } (A - \lambda I)^{k-1}\mathbf{e} \neq 0_{n\times 1}\,,\ (A - \lambda I)^k \mathbf{e} = 0_{n\times 1}$$

sa nazýva reťazec zovšeobecnených vlastných vektorov.

Ak v predchádzajúcej definícii označíme $\mathbf{e} = \mathbf{b}_1$, $(A - \lambda I)\mathbf{e} = \mathbf{b}_2$, $\ldots$ $(A - \lambda I)^{k-1}\mathbf{e} = \mathbf{b}_k$, tak platí $\mathbf{b}_2 = (A - \lambda I)\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_3 = (A - \lambda I)\mathbf{b}_2$, $\ldots$ $\mathbf{b}_k = (A - \lambda I)\mathbf{b}_{k-1}$, pritom posledný vektor v reťazci, $\mathbf{b}_k$, je aj je vlastný vektor matice A. Teda reťazec budeme hľadať od konca.

Skôr ako na príkladoch ukážeme postup hľadania reťazcov zovšeobecnených vlastných vektorov matice A uvedieme bez dôkazu dve vety:

Veta. *Pre každú maticu $A \in C^{n\times n}$ existuje báza priestoru $C^{n\times 1}$ zložená z reťazcov zovšeobecnených vlastných vektorov matice A.*

Veta. *Ak $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_k$ sú vlastné vektory operátora (matice) patriace k navzájom rôznym vlastným číslam, tak tvoria lineárne nezávislú množinu.*

Príklad. Nájdite bázu zloženú z reťazcov zovšeobecnených vlastných vektorov matice $A = \begin{pmatrix} 5 & -7 & 4 \\ 1 & -3 & -1 \\ 6 & -6 & 3 \end{pmatrix}$, ak viete, že $\sigma(A) = (-2, -2, 9)$

Riešenie. Najprv hľadáme vlastné vektory (teda posledná vektory v reťazcoch), pre jednonásobné vl. číslo $\lambda_3 = 9$ potrebujeme nájsť len jeden vektor, ten bude vlastný a nájdeme ho riešením sústavy $(A - 9I)\mathbf{x} = 0$:

$$\begin{pmatrix} 5-9 & -7 & 4 \\ 1 & -3-9 & -1 \\ 6 & -6 & 3-9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -7 & 4 \\ 1 & -12 & -1 \\ 6 & -6 & -6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -4 & -7 & 4 \\ 1 & -12 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & -11 & 0 \\ 0 & -11 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Dostávame $\mathbf{b}_3 = (1,\ 0,\ 1)^\top$, ostatné vlastné vektory príslušné k $\lambda_3 = 9$ sú nenulovým násobkom vektora $\mathbf{b}_3$.

Pre $\lambda = -2$ nájdeme buď dva lineárne nezávisle vlastné vektory alebo jeden reťazec zovšeobecnených vlastných vektorov, najprv vlastné vektory:

$$A - (-2)I = \begin{pmatrix} 7 & -7 & 4 \\ 1 & -1 & -1 \\ 6 & -6 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 11 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 11 \end{pmatrix} \implies \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

a $\mathbf{b}_1$ treba hľadať ako zovšeobecnený vlastný vektor, t.j ako riešenie sústavy $(A + 2I)\mathbf{b}_1 = \mathbf{b}_2$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 7 & -7 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 6 & -6 & 5 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 11 & -6 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 11 & -6 \end{array}\right) \implies \mathbf{b}_1 = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix}$$

trojica $(\underbrace{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2}_{\lambda=-2}, \underbrace{\mathbf{b}_3}_{\lambda=9})$ nie je určená jednoznačne,
sústavy majú nekonečne veľa riešení, hľadáme však iba jedno riešenie.

Príklad. Nájdite bázu zloženú z reťazcov zovšeobecnených vlastných vektorov matice $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$, ak viete, že $\sigma(A) = (1, 1, 1)$

Riešenie. V tomto prípade buď nájdeme jeden alebo dva lineárne nezávislé vlastné vektory a teda jeden alebo dva reťazce.

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -2 & 3 & 2 \end{pmatrix} \sim_{\substack{R_2+R_1 \\ R_3-2R_1}} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \implies \mathbf{b}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

a viac lineárne nezávislých vlastných vektorov neexistuje, hľadáme teda zovšeobecnené vlastné vektory, $\mathbf{b}_2$ je riešenie sústavy $(A-I)\mathbf{b}_2=\mathbf{b}_3$:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ -2 & 3 & 2 & 1 \end{array}\right) \sim_{\substack{R_2+R_1 \\ R_3-2R_1}} \left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{array}\right) \implies \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

a nakoniec $\mathbf{b}_1$ je riešenie sústavy $(A-I)\mathbf{b}_1=\mathbf{b}_2$:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim_{\substack{R_2+R_1 \\ R_3-2R_1}} \left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \end{array}\right) \implies \mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Takže sme našli jeden reťazec zovšeobecnených vlastných vektorov matice A a platí $A\mathbf{b}_1 = \mathbf{b}_1+\mathbf{b}_2$, $A\mathbf{b}_2=\mathbf{b}_2+\mathbf{b}_3$, $A\mathbf{b}_3=\mathbf{b}_3$ ak zostavíme maticu P: $P_{*1}=\mathbf{b}_1, P_{*2}=\mathbf{b}_2, P_{*3}=\mathbf{b}_3$, tak platí

$$A = P\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}P^{-1}, \text{ kde } P = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Definícia. Matica $J_k(\lambda) \in C^{k\times k}$ sa nazýva Jordanov blok s vlastným číslom λ, ak je maticou lineárneho operátora (matice) A vzhľadom na bázu, ktorá je reťazcom zovšeobecnených vlastných vektorov matice A:

$$B=\{\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\dots,\mathbf{b}_k\}\,,\ (A-\lambda I)\mathbf{b}_1=\mathbf{b}_2\,,(A-\lambda I)\mathbf{b}_2=\mathbf{b}_3\,,\dots(A-\lambda I)\mathbf{b}_k=0_{n\times n}\,.$$

Príklad. Ak $k=3$, tak $B=\{\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\mathbf{b}_3\}$.

$$\begin{array}{llll} & (A-\lambda I)\mathbf{b}_1 = A\mathbf{b}_1-\lambda\mathbf{b}_1=\mathbf{b}_2\,, & (A-\lambda I)\mathbf{b}_2 = A\mathbf{b}_2-\lambda\mathbf{b}_2=\mathbf{b}_3\,, & (A-\lambda I)\mathbf{b}_3 = A\mathbf{b}_3-\lambda\mathbf{b}_3=0_{n\times 1} \\ \implies & A\mathbf{b}_1=\lambda\mathbf{b}_1+1\mathbf{b}_2+0\mathbf{b}_3\,, & A\mathbf{b}_2=0\mathbf{b}_1+\lambda\mathbf{b}_2+\mathbf{b}_3 & A\mathbf{b}_3=0\mathbf{b}_1+0\mathbf{b}_2+\lambda\mathbf{b}_3 \\ & [A\mathbf{b}_1]_B=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 0\end{pmatrix}^\top & [A\mathbf{b}_2]_B=\begin{pmatrix}0 & \lambda & 1\end{pmatrix}^\top & [A\mathbf{b}_3]_B=\begin{pmatrix}0 & 0 & \lambda\end{pmatrix}^\top \end{array}$$

teda $J_3(\lambda)=\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$

Definícia. Hovoríme, že matica J je v Jordanovom kanonickom tvare (JKT), ak je blokovo diagonálna a jej diagonálne bloky sú Jordanove, t.j.

$$A=\begin{pmatrix} J_{k_1}(\lambda_1) & 0_{k_1\times k_2} & \dots & 0_{k_1\times k_m} \\ 0_{k_2\times k_1} & J_{k_2}(\lambda_2) & \dots & 0_{k_2\times k_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0_{k_m\times k_1} & 0_{k_m\times k_2} & \dots & J_{k_m}(\lambda_m) \end{pmatrix} = J_{k_1}(\lambda_1)\oplus J_{k_2}(\lambda_2)\oplus\dots\oplus J_{k_m}(\lambda_m)$$

a diagonálne bloky patriace k tomu istému vlastnému číslu sú na diagonále umiestnené za sebou zostupne podľa rozmeru, t.j.

$$\left.\begin{array}{c} p<i<q \\ \lambda_p=\lambda_q \end{array}\right\} \implies \lambda_p=\lambda_i=\lambda_q\,,\quad \lambda_i=\lambda_{i+1} \implies k_i\geq k_{i+1}$$

Príklad. Pre $m = 3$, $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$, $k_1 = k_2 = 2$, $\lambda_3 = -1$, $k_3 = 3$ dostaneme maticu $J \in C^{7\times 7}$:

$$J = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Ľahko sa teraz ukáže, že minimálny polynóm matice J (a každej matice podobnej matici J) je $m_J(\lambda) = (\lambda - 3)^2(\lambda + 1)^3$ (násobnosť vlastného čísla v minimálnom polynóme sa rovná rozmeru najväčšieho Jordanovho bloku príslušného k tomuto vlastnému číslu):

$$(J - 3I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 16 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -8 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -8 & 16 \end{pmatrix}$$

Podobne $[J_3(-1) - (-1)I]^3 = 0$ a potom $(J - 3I)^2(J + I)^3 = 0$.

Ak označíme blokovo diagonálnu maticu $J = J_2(3) \oplus J_2(3) \oplus J_3(-1)$, tak $J^k = [J_2(3)]^k \oplus [J_2(3)]^k \oplus [J_3(-1)]^k$, t.j. mocniny sa počítajú „po blokoch".