Lineárna algebra a LP

doc. Michal Zajac

2 Vlastnosti komplexných čísel

Zopakujeme stručne vlastnosti komplexných čísel. Množinu všetkých reálnych čísel budem označovať R, imaginárnu jednotku i (t.j. platí $i^2 = -1$). Potom množina všetkých komplexných čísel je

$$C = \{x + iy \colon x, y \in R\}. \quad x = \operatorname{Re} z \text{ je reálna a } y = \operatorname{Im} z \text{ imaginárna časť čísla } z = x + iy.$$

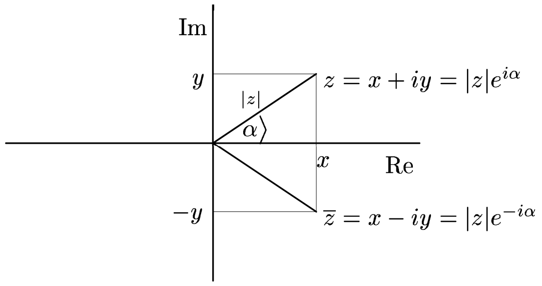
Aritmetické operácie v C ($\overline{z} = x - iy$ sa nazýva číslo komplexne združené k $z = x + iy$):

sčítanie: $(x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$,

násobenie: $(x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + y_1x_2)$

delenie: $\dfrac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \dfrac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2}\dfrac{x_2 - iy_2}{x_2 - iy_2} = \dfrac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\dfrac{y_1x_2 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}$, $(x_2 + iy_2 \neq 0)$

Pripomeňme, že komplexné čísla znázorňujeme v Gaussovej rovine:



$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ sa nazýva absolútna hodnota a orientovaný uhol α sa nazýva argument komplexného čísla $z = x + iy$ (argument čísla $c = 0$ nie je definovaný).

Základné vlastnosti komplexných čísel zhrnieme v nasledujúcich tvrdeniach:

Moivreova veta:

Pre všetky $r_1, r_2 > 0$, $\alpha_1, \alpha_2 \in R$ platí: $r_1e^{i\alpha_1} \cdot r_2e^{i\alpha_2} = r_1r_2e^{i(\alpha_1+\alpha_2)}$ (absolútne hodnoty sa násobia; argumenty sčítajú).

vlastnosti absolútnej hodnoty Pre $\forall z_1, z_2 \in C$ platí:

(1) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ (trojuholníková nerovnosť),

(2) $|z_1z_2| = |z_1|\,|z_2|$

vlastnosti komplexne združených čísel Pre $\forall z, z_1, z_2 \in C$ platí:

(3) $\overline{(z_1 + z_2)} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$

(4) $\overline{(z_1z_2)} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}$

(5) $z\overline{z} = |z|^2$.

(6) $\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}(z + \overline{z})$, $\operatorname{Im} z = \frac{1}{2i}(z - \overline{z}) = \frac{i}{2}(\overline{z} - z)$

Zopakujeme ešte, ako sa rieši binomická rovnica: $z^n = c$, $n \in N$, $c \in C$, $c \neq 0$:

Pravú stranu napíšeme v goniometrickom tvare $c = |c|e^{i\alpha}$ a použijeme Moivreovu vetu:

$$z^n = |c|e^{i\alpha}$$
$$z^n = |c|e^{i(\alpha+2k\pi)}$$
$$z_k = \sqrt[k]{|c|}e^{i\left(\frac{\alpha}{n}+k\frac{2k\pi}{n}\right)}, k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$$

Úlohy.

1.1. Dokážte vlaastnosti (1)–(6)

1.2. Riešte binomické rovnice:

(a) $z^4 = -4$, (b) $z^6 = -8$, (c) $z^4 = -2 + 2\sqrt{3}$.

Korene vyjadrite v algebraickom aj goniometrickom tvare a znázornite.

1.3. číslo c vyjadrite v algebraickom a v goniometrickom tvare

(a) $c = i^{4k+m}$, $k \in Z$, $m = 0, 1, 2, 3$. (b) $c = \left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^{2007}$,

2. Vlastnosti polynómov s komplexnými koeficientami

Najprv pripomenieme (z predmetu M1):

Veta (Základná veta algebry). *Každý polynóm s komplexnými koeficientami stupňa aspoň 1 má koreň $c \in C$.*

Veta. *Ak $f(z)$ je polynóm nad C a je dané $c \in C$, tak zvyšok po delení $f(z):(z-c)$ je číslo $f(c)$; špeciálne, ak c je koreň polynómu f, tak sa dá deliť $f(z):(z-c)$ bezo zvyšku.*

Dôkaz. Delením dostaneme podiel $g(z)$ a zvyšok je polynóm $r(z)$, $\mathrm{st}\, r < \mathrm{st}\,(z-c) = 1$. Teda $r(z) = r$ je konštanta a $f(z) = (z-c)(g(z) + r \implies f(c) = (c-c)g(c) + r = r$.

Kanonický rozklad. *Každý polynóm stupňa n nad C sa dá napísať v tvare*

$$a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 = a_n(z-c_1)^{k_1}(z-c_2)^{k_2}\dots(z-c_m)^{k_m}\,,\ \textit{kde } k_1 + k_2 + \dots k_m = n\,,$$

čísla $c_1, c_2, \dots, c_m$ sú korene polynómu f. Číslo k_j sa nazýva násobnosť koreňa c_j $(j = 1, 2, \dots, m)$.

Úlohy.

2.1a. Napíšte zvyšok po delení $(z^{10} - z^5 + 1):(z+i)$

2.1b. Napíšte rozklad nad C polynómov $f_1(z) = z^6+1$, $f_2(z) = z^6-1$, $f_3(z) = z^2+z+1$, $f_4(z) = 2z^2+2z+1$.

Popíšeme algoritmus na určenie najväčšieho spoločného deliteľa dvoch polynómov f_1, f_2 ($\gcd(f_1, f_2)$). Je založený na nasledujúcom jednoduchom tvrdení:

Ak f, g, p, r sú polynómy a platí $f(z) = g(z)p(z) + r(z)$, tak $\gcd(f, g) = \gcd(g, r)$. Stačí si uvedomiť, že

$$\left.\begin{aligned} g(z) &= d(z)g_1(z)\,, \\ r(z) &= d(z)r_1(z) \end{aligned}\right\} \implies f(z) = d(z)g_1(z)p(z) + d(z)r_1(z) = d(z)[g_1(z)p(z) + r_1(z)]\,,$$

teda každý spoločný deliteľ d polynómov g, r je deliteľom všetkých troch polynómov f, g, r. Podobne, ak d je deliteľom f aj g, tak je aj deliteľom polynómu $r(z) = f(z) - g(z)p(z)$.

Euklidov Algoritmus.

Vstupom je dvojica nekonštnatných polynómov $f_1(z), f_2(z)$; môžeme predpokladať, že $\mathrm{st}\, f_1 \geq \mathrm{st}\, f_2$.

Delením $f_1(z) : f_2(z)$ dostaneme podiel $p(z)$ a zvyšok $f_3(z)$
$f_1(z) = p_1(z)f_2(z) + f_3(z)$, $\mathrm{st}\, f_3 < \mathrm{st}\, f_2$. Ak $f_3(z) = 0$, tak $\gcd(f_1, f_2) = f_2$ a skončíme. V opačnom prípade $\gcd(f_1, f_2) = \gcd(f_2, f_3)$ a opakujeme to isté s novými dvojicami polynómov $[(f_2, f_3); (f_3, f_4); \dots\ ]$

Pretože $\mathrm{st}\, f_1 > \mathrm{st}\, f_2 > \mathrm{st}\, f_3 \dots$, po $k \leq n = \mathrm{st}\, f_2$ krokoch dostaneme nulový polynóm $f_{k+2} = 0$, $f_{k+1} \neq 0$. Posledný nenulový zvyšok je $f_{k+1} = \gcd(f_1, f_2)$.

Nasledujúce tvrdenie sa dá jednoducho dokázať pomocou Euklidovho algoritmu. Využijeme ho neskoršie pri jednej zo základných úloh lineárnej algebry — konštrukcii Jordanovho tvaru matice.

Veta. *Nech $f(z), g(z)$ sú polynómy, potom existujú polynómy $a(z), b(z)$ také, že*
$\gcd(f, g) = a(z)f(z) + b(z)g(z)$.

Úlohy.

2.1 Napíšte kanonický rozklad nad C polynómu $f(z) =$
(a) $z^6 + 1$, (b) $z^6 - 1$, (c) $z^2 + z + 1$, (d) $z^3 - 2z^2 + 2z - 1$, (e) $z^3 + 8i$, (f) $z^3 - 8i$

2.2 Nájdite $\gcd\big(f_1(z), f_2(z)\big)$ a (najmenší spol. násobok) $\mathrm{lcm}\big(f_1(z), f_2(z)\big)$ pre
(a) $f_1(z) = 2z^3 - z^2 + 2$, $\quad f_2(z) = z^4 + z^3 + z^2 - 1$;
(b) $f_1(z) = 2z^4 + z^3 + z^2 - 2$, $\quad f_2(z) = z^3 + 2z^2 + 3z + 2$;
(c) $f_1(z) = z^4 + (1-i)z^3 + (-2-2i)z^2 + (2i-1)z + i$, $\quad f_2(z) = z^3 + (2-i)z^2 + (2-2i)z - 2i$;
(d) $f_1(z) = z^4 + z^3 + 2z^2 + 1$, $\quad f_2(z) = z^3 - 2z^2 + z - 2$.

2.3 Zistite, či má daný polynóm f koreň násobnosti väčšej ako 1.
(a) $f(z) = 4z^3 - 8z^2 - 11z - 3$, (b) $f(z) = z^3 - 2z^2 + 3z - 3$, (c) $f(z) = z^4 - 2iz^3 - 2iz - 1$

2.4 Pre každý polynóm z cvičenia 2.3 napíšte polynóm, ktorý má tie isté korene, ale všetky sú násobnosti 1.

Polia a vektorové (lineárne) priestory.

Definícia. Poľpm K nazývame neprázdnu množinu, ktorá obsahuje dva (osobitné) prvky $0, 1 \in K$, ak sú na K definované operácie
$+\colon K \times K \to K$ (sčítanie),
ňcdot: $K \times K \to K$ (násobenie),
pre ktoré platí: $\forall\, a, b, c \in K$

1. $a + b = b + a$ (komutatívnosť sčítania)
2. $(a + b) + c = (a + b) + c$ (asociatívnosť sčítania)
3. $a + 0 = a$ (0 je neutrálny prvok vzhľadom na sčítanie)
4. $\forall a \in K\, \exists d \in K\colon a + b = 0$ ($b = -a$, opačný prvok vzhľadom na sčítanie)
5. $a \cdot b = b \cdot a$ (komutatívnosť násobenia)
6. $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ (asociatívnosť násobenia)
7. $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ (distributívnosť)
8. $1 \cdot a = a$
9. $\forall a \neq 0 \exists b \in K\colon a \cdot b = 1$ ($b = a^{-1}$ je inverzný prvok k prvku a)
10. $0 \neq 1$

Príkladom nekonečných polí je pole všetkých racionálnych čísel Q, reálnych čísel R, komplexných čísel C.
Množinu $Z_n = \{0, 1, \dots, n-1\}$ všetkých zvyškov po delení prirodzeného čísla číslom n spolu s opráciami $\oplus, \odot$: $a \oplus b = c \iff n|[c - (a + b)]$; $a \odot b = c \iff n|c - (a \cdot b)$ spĺňa vlastnosti 1–8 a 10. Ku každému nenulovému prvku však nemusí existovať inverzný. Je známe, že Z_n je pole práve vtedy, keď je n prvočíslo. Pripomeňme ešte označenie: Ak a, b sú prirodzené čísla, ktoré po delení číslom n dávajú rovnaký zvyšok (teda $n|a - b$), tak píšeme $a \equiv b \mod n$. Z_n môžeme stotožniť s rozkladom množiny Z všetkých celých čísel na zvyškové triedy:

$$[0] = \{n \cdot k\colon k \in Z\}\,,\ [1] = \{n \cdot k + 1\colon k \in Z\}\,,\ \dots\ ,\ [n-1] = \{n \cdot k + (n-1)\colon k \in Z\}$$

$$Z = \bigcup_{k=0}^{n-1} [k]\,, \qquad \text{pričom zrejme } a, b \in [k] \implies a \equiv b \mod n$$

Tento rozklad sa označuje $Z/(n)$. Podobná konštrukcia sa používa na rozširovanie polí na algebraicky uzavreté polia.

Definícia. Pole K sa nazýva algebraicky uzavreté ak má každý polynóm s koeficientami v poli K koreň v poli K.

Napríklad pole komplexných čísel je algebraicky uzavreté rozšírenie poľa reálnych čísel: $x^2 + 1$ je v poli R ireducibilný (nemá koreň). Označíme $P(R)$ množinu všetkých polynómov s reálnymi koeficientami. Pole komplexných čísel môžeme potom stotožniť s množinou tried rozkladu $P(R)$ podľa ekvivalencie

$$f(x) \equiv g(x) \mod (x^2 + 1) \iff x^2 + 1 \text{ je deliteľom } f(x) - g(x) \qquad \text{t.j. } C \cong P(R)/(x^2 + 1)$$

$x^2 + 1 \equiv 0 \mod (x^2 + 1) \implies x^2 \equiv -1 \mod (x^2 + 1)$. Keď označíme triedu $[x] = i$ dostaneme $[x]^2 = -1$. Komplexné čísla sa teda dajú stotožniť s množinou zvyškov po delení polynómov s reálnymi koeficientami polynómom $x^2 + 1$, teda s množinou $P_1(R)$ všetkých reálnych polynómov najviac prvého stupňa.

Príklad. Polynóm $f(x) = x^2 + x + 1$ je ireducibilný polynóm nad Z_2. Popíšte pole $P(Z_2)/(x^2 + x + 1)$

Prvky tohoto poľa môžeme stotožniť so zvyškami po delení polynómom $f(x)$, t.j. s

$$P_1(Z_2) = \{e_0, e_1, e_2, e_3\}\colon \quad e_0(x) = 0\,,\ e_1(x) = 1\,,\ e_2(x) = x\,,\ e_3(x) = x + 1$$

Pre toto pole napíšte tabuľku násobenia a sčítania.

Lineárne priestory.

Definícia. Trojica $(L, \oplus, \odot)$ sa nazýva lineárny (vektorový) priestor nad poľom $(K, +, \cdot)$, ak L je neprázdna množina (vektorov) a $\oplus\colon L \times L \to L$; $\odot\colon K \times L \to L$ sú operácie také, že platí:
pre $\forall\, x, y, z \in L$ a pre $\forall\, \alpha, \beta \in K$
(L1) $x \oplus y = y \oplus x$ (komutatívny zákon pre sčítanie)
(L2) $(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z)$ (asociatívny zákon pre sčítanie)
(L3) $\exists\, \mathbf{0} \in L$: $x \oplus \mathbf{0} = x$ (existuje neutrálny prvok pre sčítanie)
(L3) $\forall x \in L\ \exists y \in L$ taký, že $x \oplus y = \mathbf{0}$ ($\exists\, y = -x$ opačný prvok k x)
(L5) $\alpha \odot (x \oplus y) = (\alpha \odot x) \oplus (\alpha \odot y)$
(L6) $(\alpha + \beta) \odot x = (\alpha \odot x) \oplus (\beta \odot y)$
(L7) $(\alpha\beta) \odot x = \alpha \odot (\beta \odot x)$
(L8) $1 \odot x = x$

Príkladmi lineárnych priestorov nad R sú preistory funkcií $f\colon A \to R$ s obvyklými operáciami sčítania funkcií a násobenia funkcie reálnym číslom. Rovnako aj množina všetkých funkciíi $f\colon A \to K$ je lione8rny priestor nad polom K. Špeciálne, ak $A = \{1, 2, \dots, n\}$, tento priestor označujeme K^n a je to lineárny priestor n-tíc prvkov z poľa K.

Úloha. Vypočítajte $(1,0,1,1) \oplus (1,1,0,1)$ v lineárnom priestore K^n, kde
a. $K = R$, b. $K = Z_3$, c. $K = Z_2$.

Definícia. Nech $(L, +, \cdot)$ je lineárny priestor nad poľom K. Podmnožina $M \subset L$ sa nazýva podpriestor lineárneho priestoru $(L, +, \cdot)$, ak je $(M, +, \cdot)$ tiež lineárnym priestorom.

Veta. *Podmnožina $M \subset L$ je podpriestor lineárneho priestoru $(L, +, \cdot)$ vtedy a len vtedy, ak*
(1) $x, y \in M \implies x + y \in M$
(2) $x \in M,\ \alpha \in K \implies \alpha \cdot x \in M.$

Príklady. Ukážte, že
1. $M = \{(x_1, x_2, x_3) \in K^3 \colon x_1 - x_2 + x_3 = 0\}$ je podpriestor lineárneho priestoru K^3.
2. $M = \{(1, 1, , x) \colon x \in Z_2\} = \{(1, 1, , 0), (1, 1, , 1)\}$ nie je podpriestor Z_2^3.
3. $M = \{(0, x, y) \colon x, y \in Z_2\}$ je podpriestor Z_2^3.
4. Priestor všetkých polynómov nad R najviac tretieho stupňa je podpriestor LP všetkých funkcií $R \to R$.
5. Priestor všetkých polynómov nad R tretieho stupňa nie je podpriestor LP všetkých funkcií $R \to R$.

Definícia. Nech $(L, +, \cdot)$ je LP nad poľom K.
a. Ak $x_1, x_2, \dots, x_n \in L$; $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in K$, tak sa
$x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n \in L$ nazýva *lineárna kombinácia* vektorov $x_1, x_2, \dots, x_n$ s koeficientami $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$.
b. Ak $\emptyset \neq M \subset L$, tak sa množina všetkých lineárnych kombinácií prvkov z množiny M nazýva *lineárny obal množiny M*. Označujeme ho $\operatorname{span} M$.
c. Konečná podmnožina vektorov $\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subset L$ sa nazýva *lineárne nezávislá*, ak

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n = 0 \implies \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0\,.$$

Množina $M \subset L$ sa nazýva lineárne nezávislá, ak je každá konečná podmnožina $M_1 \subset M$ lineárne nezávislá. Množina $M \subset L$, ktorá nie je lineárne nezávislá sa nazýva lineárne závislá.
d. $B \subset L$ sa nazýva báza lineárneho priestoru L, ak
1) $\operatorname{span} B = L$, 2) B je lineárne nezávislá.

Ľahko sa dá ukázať, že platí:

Veta. *Podmnožina $M \subset L$ je podpriestor lineárneho priestoru $(L, +, \cdot)$ vtedy a len vtedy, ak $\exists A \subset L$ také, že $M = \operatorname{span} A$.*

Príklad. Ukážte, že
1. V R^3 je $\mathcal{E} = \{\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0), \mathbf{e}_2 = (0, 1, 0), \mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)\}$ tzv. štandardná báza.
2. V LP funkcií $f \colon R \to R$ je množina $\{\sin t, \sin 2t, \sin 3t, \cos t\}$ lineárne nezávislá.
3. $\{x^0, x^1, x^2, \dots\}$ je lineárne nezávislá množina.
3. $\{\sin^2 t, \cos^2 t, \cos 2t\}$ je lineárne závislá množina.

Veta. *Ak v lineárnom priestore existuje n-prvková báza, tak každá $(n+1)$-prvková množina je lineárne závislá.*

Dôsledok.
Ak v lineárnom priestore existuje jedna n-prvková báza, tak aj každá jeho báza je n-prvková množina.

Definícia. Nech $(L, +, \cdot)$ je LP nad poľom K. Ak existuje konečná báza priestoru L, tak hovoríme, že L je konečnorozmerný priestor. Počet prvkov bázy sa nazýva dimenzia lineárneho priestoru L a označuje sa $\dim L$.

Príklad. Určte $\dim M$ pre podpriestor $M = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in C^4 \colon x_1 - x_2 = 2_2 + x_3 - x_4 = 0\}$.

M je priestor riešení homogénnej sústavy lineárnych rovníc, môžeme vyjadriť:

$$M = \{(b-a, b-a, a, b) \colon a, b \in C\} = \{a(-1,-1,1,0) + b(1,1,0,1) \colon a, b \in C\} = \operatorname{span}\{(-1,-1,1,0), (1,1,0,1)\}$$
$$a(-1,-1,1,0) + b(1,1,0,1) = (b-a, b-a, a, b) = (0,0,0,0) \implies a = b = 0$$

Teda $B = \{(-1,-1,1,0), (1,1,0,1)\}$ je lineárne nezávislá množina a $\operatorname{span} B = M$, t.j. je to báza priestoru M. Počet prvkov množiny B je 2, t.j. $\underline{\dim M = 2}$.

Veta. *Nech $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_n\}$ je usporiadaná báza lineárneho priestoru L nad poľom K. Potom sa každé $\mathbf{x} \in L$ dá jediným spôsobom vyjadriť ako lineárna kombinácia*

$$\mathbf{x} = x_1 \mathbf{b}_1 + x_2 \mathbf{b}_2 + \cdots + x_n \mathbf{b}_n\,, \quad x_1, x_2, \dots, x_n \in K$$

Dôkaz. Ak by sa dalo $\mathbf{x}$ dvoma spôsobmi:

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{b}_1 + x_2\mathbf{b}_2 + \cdots + x_n\mathbf{b}_n = \mathbf{x} = y_1\mathbf{b}_1 + y_2\mathbf{b}_2 + \cdots + y_n\mathbf{b}_n$$

tak by platilo

$$\mathbf{x}-\mathbf{x} = (x_1\mathbf{b}_1+x_2\mathbf{b}_2+\cdots+x_n\mathbf{b}_n)-(y_1\mathbf{b}_1+y_2\mathbf{b}_2+\cdots+y_n\mathbf{b}_n) = (x_1-y_1)\mathbf{b}_1+(x_2-y_2)\mathbf{b}_2+\cdots+(x_n-y_n)\mathbf{b}_n = \mathbf{0}$$

Z lineárnej nezávislosti $\mathcal{B}$ potom vyplýva:

$$(x_1 - y_1) = (x_2 - y_2) = \cdots = (x_n - y_n) = 0 \implies x_1 = y_1\,,\ x_2 = y_2\,,\ \ldots\ x_n = y_n\,.$$

Definícia. Nech $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n\}$ je usporiadaná báza lineárneho priestoru L nad poľom K a $\mathbf{x} \in L$. Potom sa usporiadaná n-tica $[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^\top \in K^{n\times 1}$, pre ktorú platí $\mathbf{x} = x_1\mathbf{b}_1 + x_2\mathbf{b}_2 + \cdots + x_n\mathbf{b}_n$, nazýva n-tica súradníc vektora $\mathbf{x}$ vyhľadom na bázu $\mathcal{B}$.

Príklad. V R^3 je daná báza $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$; $\mathbf{b}_1 = (1, 1, 0)$, $\mathbf{b}_2 = (1, -1, 1)$, $\mathbf{b}_3 = (0, 1, 1)$ a $\mathbf{x} = (2, 1, -1)$. Vypočítajte $[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}$.

Máme teda určiť čísla x_1, x_2, x_3 tak, aby $\mathbf{x} = x_1\mathbf{b}_1 + x_2\mathbf{b}_2 + x_3\mathbf{b}_3$. Prepíšeme to na sústavu rovníc:

$$x_1\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} + x_3\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_1 + x_2\\x_1 - x_2 + x_3\\x_2 + x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$$

Túto sústavu riešime úpravou jej rozšírenej matice na redukovanú stupňovitú maticu pomocou ERO.

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 0 & 2\\1 & -1 & 1 & 1\\0 & 1 & 1 & -1\end{array}\right) \sim \cdots \sim \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 0 & 2\\0 & 1 & 0 & 0\\0 & 0 & 1 & -1\end{array}\right) \implies [\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}.$$

Stĺpce matice sústavy tvoria prvky bázy $\mathcal{B}$, rošírená je o stĺpec vektora $\mathbf{x}$, ktorého súradnice počítame. Po úprave dostaneme jednotkovú maticu roz šírenú o stĺpec súradníc $[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}$.

Veta. *Nech $(L, +, \cdot)$ je lineárny priestor nad poľom K a $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n\}$ je jeho usporiadaná báza. Zobrazenie $\varphi\ L \to K^{n\times 1}$, $\varphi(\mathbf{x}) = [\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}$ má vlastnosti.*
(1) $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in L \implies [\mathbf{x} + \mathbf{y}]_{\mathcal{B}} = [\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} + [\mathbf{y}]_{\mathcal{B}}$.
(2) $\mathbf{x} \in L, \alpha \in K \implies [\alpha\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = \alpha[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}$.
(3) $[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = [\mathbf{y}]_{\mathcal{B}} \iff \mathbf{x} = \mathbf{y}$.

Prvé dve vlastnosti vyjadrujú, že φ je lineárne zobrazenie. Tretia hovorí, že je to bijektívne zobrazenie.

Lineárne operátory

Definícia. Nech $(L, +, \cdot)$ a $(M, \oplus, \odot)$ sú lineárne priestory nad poľom K. Zobrazenie TŁ $\to M$ sa nazýva lineárny operátor (lineárna transformácia), ak pre $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in L$, $\forall \alpha \in K$ platí
(LO1) $T(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = (T\mathbf{x}) \oplus (T\mathbf{y})$,
(LO2) $T(\alpha \cdot \mathbf{x}) = \alpha \odot (T\mathbf{x})$.
Bijektívny lineárny operátor sa nazýva izomorfizmus.

Príklady lineárnych operátorov.
1. $T\mathbf{x} = \mathbf{0}$ (nulový operátor),
2. $T\mathbf{x} = \mathbf{x}$ (pre $L = M$ identický operátor)
3. Ak $\mathcal{B}$ je usporiadaná báza priestoru L, tak $T\mathbf{x} = [\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}$ je izomorfizmus L na $K^{n\times 1}$.
4. $T\colon R^3 \to R^2$, $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2 + x_3)$ je lineárne
   $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1^2, 0)$ nie je lineárne, lebo nespĺňa LO1, napr. $T\,2(1, 0, 0) = (4, 0) \neq 2T(1, 0, 0) = (2, 0)$.

Veta. *Ak $T\colon L \to M$ je lineárny operátor, tak*
1) $T\mathbf{0}_L = \mathbf{0}_M$,
2) Pre $\forall\ \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$; $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in K$
$T(\alpha_1\mathbf{x}_1 + \alpha_2\mathbf{x}_2 + \cdots + \alpha_n\mathbf{x}_n) = \alpha_1T\mathbf{x}_1 + \alpha_2T\mathbf{x}_2 + \alpha_nT\mathbf{x}_n$.

(2) $\implies$ Lineárny operátor $T\colon L \to M$ je jednoznačne určený svojimi hodnotami v prvkoch bázy priestoru L. Ak $\dim L < \infty$ aj $\dim M < \infty$, tak to umožní reprezentovať lineárny operátor pomocou matice.

Definícia. Nech $T\colon L \to M$ je lineárny operátor. Množina $\operatorname{Ker} T = \{\mathbf{x} \in L\colon T\mathbf{x} = \mathbf{0}_M\} \subset L$ sa nazýva *jadro* lineárneho operátora T.
Obor hodnôt lineárneho operátora sa označuje $\operatorname{Ran} T = \{T\mathbf{x}\colon \mathbf{x} \in L\} \subset M$.

Veta. *Nech $T\ : L \to M$ je lineárny operátor. Potom platí:*

a) $\operatorname{Ker} T$ *je podpriestor priestoru* L.
b) $\operatorname{Ran} T$ *je podpriestor priestoru* M.
c) *Ak* $\mathcal{B}$ *je báza priestoru* L, *tak* $\operatorname{Ran} T = \operatorname{span}\{T\mathbf{b} \colon \mathbf{b} \in \mathcal{B}\}$, *preto* $\dim \operatorname{Ran} T \le \dim L$.
d) T *je injektívny lineárny operátor vtedy a len vtedy, keď* $\operatorname{Ker} T = \{\mathbf{0}_L\}$.
e) *Ak* $\dim L = \dim M = n$, *tak* T *je injektívny vtedy a len vtedy keď je* T *surjektívny.*
f) *Ak* $\dim L = n$, *tak* $\dim \operatorname{Ker} T + \dim \operatorname{Ran} T = n$ *(„základná" veta lineárnej algebry)*
g) *Ak* T *je bijektívny lineárny operátor, tak aj k nemu inverzné zobrazenie* T^{-1} *je bijektívny lineárny operátor.*

Maticová reprezentácia lineárneho operátora $T\colon K^m \to K^n$.

Najskôr zavedieme označenie: Ak $A = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}} \in K^{m\times n}$ je matica s m riadkami a n stĺpcami a prvkami a_{ij} z poľa K, tak
jej riadky budeme označovať A_{i*}, $i = 1, 2, \dots, m$ a stĺpce budeme označovať A_{*j}, $j = 1, 2, \dots, n$.

Definícia. Nech $\dim L = n$, $\dim M = m$, $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_n\}$ je usporiadaná báza lineárneho priestoru L a $\mathcal{D}$ je usporiadaná báza lineárneho priestoru M. Matica $[T]_{\mathcal{BD}} = A \in K^{m\times n}$ sa nazýva matica lineárneho operátora $T\colon L \to M$, ak $A_{*j} = [T\mathbf{b}_j]_{\mathcal{D}}$.

Ak $L = M$ a $\mathcal{B}$ je báza priestoru L, tak stručne píšeme $[T]_{\mathcal{B}}$ namiesto $[T]_{\mathcal{BB}}$.

Násobenie matíc a matca $[T]_{\mathcal{BD}}$ sú definované tak, aby platili nasledujúce dve vety:

Veta. *Nech* $\mathcal{B}$ *je usporiadaná báza lineárneho priestoru* L *a* $\mathcal{D}$ *je usporiadaná báza lineárneho priestoru* M *a* $T\colon L \to M$ *je lineárny operátor. Potom platí*

$$[T\mathbf{x}]_{\mathcal{D}} = [T]_{\mathcal{BD}}[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} \qquad \forall\, \mathbf{x} \in L\,.$$

Dôkaz tejto (aj nasledujúcej) vety tu vynechám, ale odporúčam ho urobiť (priamym výpočtom) v prípade $\dim L = 3$, $\dim M = 2$, teda $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$, $\mathcal{D} = \{\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2\}$.

Veta. *Nech* $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$, $\mathcal{B}_3$ *sú usporiadané bázy lineárnych priestorov* L_1, L_2 *a* L_3*;* $T_1\colon L_1 \to L_2$, $T_2\colon L_2 \to L_3$ *sú lineárne operátory a* T_2T_1 *znamená z nich zložený operátor,* $T_2T_1\colon L_1 \to L_3$. *Potom platí*

$$[T_2T_1]_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_3} = [T_2]_{\mathcal{B}_2\mathcal{B}_3}[T_1]_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2}\,,$$

t.j. násobenie matíc zodpovedá skladaniu lineárnych operátorov.

Príklad. Nech $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$, $\mathcal{D} = \{\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \mathbf{d}_3\}$ sú bázy lineárneho priestoru L, potom má identický operátor $I\colon L \to L$, $I\mathbf{x} = \mathbf{x}$ matice:

$$[I]_{\mathcal{B}} = [I]_{\mathcal{D}} = I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\,,$$
$$A = [I]_{\mathcal{BD}}\,,\ A_{*1} = [\mathbf{b}_1]_{\mathcal{D}}\,,\ A_{*2} = [\mathbf{b}_2]_{\mathcal{D}}\,,\ A_{*3} = [\mathbf{b}_3]_{\mathcal{D}}\,;$$
$$B = [I]_{\mathcal{DB}}\,,\ B_{*1} = [\mathbf{d}_1]_{\mathcal{B}}\,,\ B_{*2} = [\mathbf{d}_2]_{\mathcal{B}}\,,\ B_{*3} = [\mathbf{d}_3]_{\mathcal{B}}\,,$$

Ak $\mathcal{B}$ a $\mathcal{D}$ sú bázy konečnorozmerného lineárneho priestoru L, matica $[I]_{\mathcal{BD}}$ sa nazýva matica prechodu od bázy $\mathcal{B}$ k báze $\mathcal{D}$. Súradnice $[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}$ vektora $\mathbf{x}$ vzhľadom na bázu $\mathcal{B}$ sa násobením maticou $[I]_{\mathcal{BD}}$ zmenia na súradnice toho istého vektora vzhľadom na bázu $\mathcal{D}$. Ak $\mathcal{D}$ je štandardná báza priestoru $K^{n\times 1}$, tak stĺpce matice $[I]_{\mathcal{BD}}$ sú priamo vektory $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_n$, ktoré tvoria bázu $\mathcal{B}$.

Príklad. $B = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$, $D = \{\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2\}$ Napíšte maticu $[T]_{BD}$, ak $T\colon R^3 \to R^2$,

$$T(x_1, x_2, x_3) = (x_2 + x_3\,,\ x_1 - x_2 + 2x_3)$$
$$\mathbf{b}_1 = (1, 0, -2)\,,\quad \mathbf{b}_2 = (1, 1, 0)\,,\quad \mathbf{b}_3 = (1, 0, 3)\,,\qquad \mathbf{d}_1 = (1\,,\,2)\,,\quad \mathbf{d}_2 = (2\,,\,1)\,.$$

Riešenie. Stĺpce matice $[T]_{BD}$ sú $[T\mathbf{b}_1]_D$, $[T\mathbf{b}_2]_D$, $[T\mathbf{b}_3]_D$. Najprv teda vypočítame:

$$T\mathbf{b}_1 = T(1, 0, -2) = (-2, -3)\,,\ T\mathbf{b}_2 = T(1, 1, 0) = (1, 0)\,,\ T\mathbf{b}_3 = T(1, 0, 3) = (3, 7)$$

a hľadáme súradnice $[T\mathbf{b}_1]_D$, $[T\mathbf{b}_2]_D$, $[T\mathbf{b}_3]_D$:

$$\left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 2 & -2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -3 & 0 & 7 \end{array}\right)_{R_2 - 2R_1} \sim \left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 2 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right)_{R_2/-3} \sim \left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 2 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1/3 & 2/3 & -1/3 \end{array}\right)_{R_1 - 2R_2}$$
$$\sim \left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & -4/3 & -1/3 & 11/3 \\ 0 & 1 & -1/3 & 2/3 & -1/3 \end{array}\right)\,,\quad [T]_{BD} = \begin{pmatrix} -4/3 & -1/3 & 11/3 \\ -1/3 & 2/3 & -1/3 \end{pmatrix}\,.$$