1. Ako narábame v poli Z_3 s 1/2?

   Odpoveď: $\frac{1}{2} = x \iff 2x = 1$. V poli Z_3: $2 \cdot 2 = 4 = 1 \pmod 3$ teda $x = 2 = 1/2$, podobne v Z_5 platí $\frac{1}{2} = 3$.

2. Neviem či úplne chápem tomu ako to je myslene že ak $\deg \gcd(f, f) \geq 1$ tak f má viacnásobný ireducibilny deliteľ. Napr. v príklade 2. c) v 3 týždni príklady mi vyšiel $\gcd(f, f) = 1$ a výsledok ktorý píšete je že nemá ireducibilny delitel nasobnosti väčšej ako 1. Ako je to možné?

   Odpoveď: $h(x) = 1$ má stupeň $\deg h = 0 \not\geq 1$

3. Upozornenie na chybu

   Ako ste v prednáške1a, str. 4 vypočítali $\mathbf{y}$ v príklade b)

   Odpoveď: Nesprávne bolo $\mathbf{y} = \left(\frac{1}{2}, -\frac{7}{5}, a, b\right)$, V aktualnej verzii som to opravil $\mathbf{y} = \left(\frac{1}{2}, -\frac{7}{10}, a, b\right)$.

4. Ak mám nejakou ná hodou v Z_3 číslo $\frac{1}{3}$ tak neexistuje inverzné ku 3? lebo $3 \notin Z_3$, alebo je to 0?

   Odpoveď: $3 \equiv 0 \pmod 3$, teda nemá inverzný prvok v Z_3. V poli Z_3 nemôžeme deliť tromi.

5. Prikladyla2.pdf, 4. týždeň, pr.1e) Je výsledok $\{(0, 1, 1)\}$ správny?

   Odpoveď: nie, správne je $\{(0, 0, 1)\}$

6. Prečo mi výsledok PrikladyLA2.pdf/4.tyzden/3.a) nevyšiel ako vám? Robím niekde chybu?

   Odpoveď: chybná bola ESO $2S_4 - 3S_2 \to S_4$, maticu sústavy rozšírenú dole o jednotkovú maticu ste upravovali nasledovne

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim_{\substack{s_2 - 2s_1 \\ s_3 - s_1 \\ s_4 - 2s_1}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim_{s_4 \leftrightarrow s_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim_{\substack{s_3 - s_2 \\ 2s_4 - 3s_2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

   Teda vyšla vám matica $U = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$, $\det U = -2$, t.j. $|\det U| = 2 \neq 1$. Substitúciou $\mathbf{x} = U\mathbf{y}$ dostanete $\mathbf{x} = (-2 + a + 2b, 2b, a, 1 - a - 3b)^\top$, $a, b \in \mathbb{Z}$ sú celočíselné riešenia danej sústavy, ale nedokázali ste, že sú všetky. Ak $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^{4\times 1}$, $\mathbf{y} = U^{-1}\mathbf{x}$ nemusí byť celočíselné. Stĺpcová operácia $s_4 = 2s_4 - 3s_2$ je postupné vykonanie (zakázanej) operácie $s_4 = 2s_4$, ktorá zdvojnásobí determinant a potom $s_4 - 3s_2$ už determinant nezmení.

   Ešte pripomínam, že matica U nie je určená jednoznačne, takže aj správne výsledky môžu vyzerať rozdielne.

7. príkladyLA2.pdf, T4/4c. Vyšlo mi LZ, ale vo výsledkoch je LNZ, prečo?

   Odpoveď: rovnicu $a_1(3, 2, 1, 0) + a_2(0, 1, 2, 3) + a_3(1, 0, 1, 0) = (0, 0, 0, 0)$ s neznámymi a_1, a_2, a_3 ste správne riešili úpravou jej matice

   $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, ale z toho ste usúdili, že množina tých 3 štvoríc je LZ.

   Keď si to prepíšete naspäť do 4 rovníc dostanete
   $a_1 + 0a_2 + 0a_3 = 0$, $0a_1 + a_2 + 0a_3 = 0$, $0a_1 + 0a_2 + a_3 = 0$, $0a_1 + 0a_2 + 0a_3 = 0$, ktoré majú jediné riešenie $a_1 = a_2 = a_3 = 0$ Takže $\{(3, 2, 1, 0); (0, 1, 2, 3); (1, 0, 1, 0)\}$ je LNZ.

8. Je výsledok pr.T5/1c v subore prikladyla2.pdf správny?

   Odpoveď: Nie je, správne je $\mathcal{B} = \{(1, 2, -2)\}$.

9. Ako sa rieši Pr T6/1a?

Odpoveď: $T\colon R^4 \to R^3$, $T(x_1,x_2,x_3,x_4) = (x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4\,,\ 2x_1 + x_2 - x_4\,,\ 3x_2 - 4x_3 + x_4)$.
Overenie lineárnosti: Ak $\mathbf{x} = (x_1,x_2,x_3,x_4)$, $\mathbf{y} = (y_1,y_2,y_3,y_4) \in R^4$, $t \in R$, tak
(1) $T(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = T\mathbf{x} + T\mathbf{y}$, (2) $(t\mathbf{x}) = tT\mathbf{x}$
$T(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = T\big((x_1,x_2,x_3,x_4) + (y_1,y_2,y_3,y_4)\big) = T(x_1+y_1, x_2+y_2, x_3+y_3, x_4+y_4) =$
$\big((x_1{+}y_1){-}(x_2{+}y_2){+}2(x_3{+}y_3){-}(x_4{+}y_4)\,,\ 2(x_1{+}y_1){+}(x_2{+}y_2){-}(x_4{+}y_4)\,,\ 3(x_2{+}y_2){-}4(x_3{+}y_3){+}(x_4{+}y_4)\big)$
Teraz stačí použiť v každej zložke vlastnosti operácií v poli:
$T(\mathbf{x}{+}\mathbf{y}) = (x_1{-}x_2{+}2x_3{-}x_4\,,\ 2x_1{+}x_2{-}x_4\,,\ 3x_2{-}4x_3{+}x_4){+}(y_1{-}y_2{+}2y_3{-}y_4\,,\ 2y_1{+}y_2{-}y_4\,,\ 3y_2{-}4y_3{+}y_4) =$
$T\mathbf{x} + T\mathbf{y}$. Teda (1) platí.
Podmienka (2) sa dokáže podobne.
Jadro $\ker T = \{\mathbf{x} \in R^4\colon T\mathbf{x} = \mathbf{0} = (0,0,0)\}$, teda množina $\forall$ riešení sústavy

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_4 &= 0 \\ 3x_2 - 4x_3 + x_4 &= 0 \end{aligned} \qquad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & -4 & 1 \end{pmatrix} \sim_{r_2 - 2r_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & 3 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

Zvolíme parametre napr. $x_2 = a$, $x_3 = b$, potom
$x_4 = 4b - 3a$, $x_1 = x_2 - 2x_3 + x_4 = a - 2b + 4b - 3a = -2a + 2b$,
$\ker T = \{(-2a+2b, a, b, 4b-3a)\colon a,b \in R\} = \{a(-2,1,0-3) + b(2,0,1,4)\colon a,b \in R\}$, t.j.
$\ker T = \operatorname{span}\{(-2,1,0-3)\,,\ (2,0,1,4)\}$, báza jadra: $\underline{\{(-2,1,0-3)\,,\ (2,0,1,4)\}}$ je 2-prvková, $\underline{\dim \ker T = 2}$
$\dim \ker T + \dim \operatorname{Ran} T = \dim R^4 = 4 \implies \underline{\dim \operatorname{Ran} T = 4 - 2 = 2}$

Iné riešenie a tiež správny výsledok

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & 3 & -4 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{4}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{4}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \implies \mathcal{B} = \big\{\big(-\tfrac{2}{3}, \tfrac{4}{3}, 1, 0\big); \big(\tfrac{2}{3}, -\tfrac{1}{3}, 0, 1\big)\big\}$$

10. Ako sa riešia príklady typu T5/1 zo súboru prikladyLA2.pdf?

Odpoveď: Zistite, či je $M \subset R^3$ podpriestorom lin. priestoru $(R^3, +, \cdot)$ s obvyklým sčítaním a násobením skalárom. Keď je M podpriestor napíšte jeho bázu a dimenziu. Podľa vety na konci str.18, prednaska1-LA2.pdf:
$M \subset L = R^3$ je podpriestor $\iff$ (1) $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in M \implies \mathbf{x} + \mathbf{y} \in M$, (2) $\mathbf{x} \in M, \alpha \in R \implies \alpha\mathbf{x} \in M$

Teda môžeme sa pokúsiť tie dve podmienky dokázať alebo vyvrátiť. Okrem tejto vety ja na ďalšej strane Veta: M je podpriestor $\iff \exists A \subset L$ také že $M = \operatorname{span} A$.

a) $M = \{(x_1,x_2,x_3) \in R^3\colon 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 0\}$
(1) $\mathbf{x} = (x_1,x_2,x_3), \mathbf{y} = (y_1,y_2,y_3) \in M$ znamená $2x_1 + x_2 - 3x_3 = 0$ aj $2y_1 + y_2 - 3y_3 = 0$,
$\mathbf{x}{+}\mathbf{y} = (x_1{+}y_1, x_2{+}y_2, x_3{+}y_3\}$. Potom $2(x_1{+}y_1){+}(x_2{+}y_2){-}3(x_3{+}y_3) = (2x_1{+}x_2{-}3x_3){+}(2y_1{+}y_2{-}3y_3) =$ $0 + 0 = 0$, t.j. $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in M$.
(2) podobne $\alpha\mathbf{x} = (\alpha x_1, \alpha x_2 = \alpha x_3) \implies 2\alpha x_1 + \alpha x_2 - 3\alpha x_3 = \alpha(2x_1 + x_2 - 3x_3) = 0$, teda aj 2. [podmienka je splnená, M je podpriestor.

a) 2. spôsob: $M = \{(x_1,x_2,x_3) \in R^3\colon 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 0\}$ je množina $\forall$ riešení lineárnej rovnice $2x_1 + x_2 - 3x_3 = 0$, zvolíme 2 parametre $x_1 = a$, $x_3 = b$, potom $x_2 = 3x_3 - 2x_1 = 3b - 2a$,
$M = \{(a, 3b-2a, b)\colon a,b \in R\} = \{\underbrace{a(1,-2,0) + b(0,3,1)}_{=(0,0,0) \iff a=b=0}\colon a,b \in R\} = \operatorname{span}\underbrace{\{(1,-2,0)\,,\ (0,3,1)\}}_{=\mathcal{B},\text{ báza } M}$,
Takže $M = \operatorname{span}\mathcal{B}$, je podpriestor a má $\dim M = 2$.

c) riešime podobne, výsledok je $\mathcal{B} = \{(1,2,-2)\}$ (pozri odpoveď 8).

b) $M = \{(x_1,x_2,x_3) \in R^3\colon 2x_1{+}x_2{-}3x_3 = 1\}$ nie je podpriestor, najjednoduchšie je ukázať, že $(0,0,0) \notin M$, lebo z podmienky (2) vyplýva $0 \cdot \mathbf{x} = (0,0,0) \in M$ pre $\forall\, \mathbf{x} \in M$.

d) $M = \{(x_1,x_2,x_3) \in R^3\colon x_1 x_2 \geq 0\}$ nie je podpriestor. Podmienka (2) je splnená, ale podm. (1) nie, napr. $\mathbf{x} = (1,0,0) \in M$, $\mathbf{y} = (0,-1,0) \in M$, ale $\mathbf{x} + \mathbf{y} = (1,-1,0) \notin M$.

11. Rôzne postupy a výsledky T5/2c
$M = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in R^4\colon 2x_1 = x_2\,,\ x_1 + x_3 - 2x_4 = 0\}$. Určte bázu M a $\dim M$.

Odpoveď: 1. apôsob: $x_1 + x_3 - 2x_4 = 0 \implies x_3 = 2x_4 - x_1$. Ak zvolíme $x_1 = a, x_4 = b$, tak $x_2 = 2a$, $x_3 = 2b - a$. $M = \{(a, 2a, 2b-a, b)\colon a,b \in R\} = \operatorname{span}\{(1,2,-1,0); (0,0,2,1)\}$. $a((1,2,-1,0) + b(0,0,2,1) =$ $(a, 2a, 2b-a, b) = (0,0,0,0) \implies a = b = 0$, teda LNZ je zrejmá. $\underline{\mathcal{B} = \{(1,2,-1,0); (0,0,2,1)\},\ \dim M = 2}$.

2. apôsob: $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & -4 \end{pmatrix}$ a zvolíme parametre $x_3 = a, x_4 = b$.
$M = \{(2b-a, 4b-2a, a, b) = \operatorname{span}\{(-1,-2,1,0); (2,4,0,1)\}$, $\underline{\mathcal{B} = \{(-1,-2,1,0); (2,4,0,1)\}}$, $\underline{\dim M = 2}$.
Báz je nekonečne veľa, všetky obsahujú 2 štvorice (2 prvky R^4).

12. V súbore prikladyLA2.pdf T2/10a) je výsledok (v Z_3) $(x+2)^2$ ale mne vyšlo $(x-1)(x+2)$, nie je tam chyba?

    Odpoveď: Nie, oba výsledky sú dobré, lebo $-1 = 2 \pmod 3$

13. Sú výsledky v dokumente tyzden-6.pdf/6c) a d) správne?

    Odpoveď: Áno, sú správne.
    c) $\mathbf{b}_1 = (1,0,2,-1)$, $\mathbf{b}_2 = (0,1,4,-2)$, $\mathbf{b}_3 = (2,-1,0,1)$, $\mathbf{b}_4 = (2,-1,-1,2)$. Hľadáme $\mathbf{x}_{\mathcal{B}} = (a_1,a_2,a_3,a_4)^\top$ také, aby $a_1\mathbf{b}_1 + a_2\mathbf{b}_2 + a_3\mathbf{b}_3 + a_4\mathbf{b}_4 = \mathbf{x} = (6,-1,7,-1)$, t.j. riešenie sústavy:

$$a_1\begin{pmatrix}1\\0\\2\\-1\end{pmatrix} + a_2\begin{pmatrix}0\\1\\4\\-2\end{pmatrix} + a_3\begin{pmatrix}2\\-1\\0\\1\end{pmatrix} + a_4\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\-1\\7\\-1\end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&2&2&6\\0&1&-1&-1&-1\\2&4&0&-1&7\\-1&-2&1&2&-1\end{array}\right) \sim_{\substack{r_3-2r_1\\r_4+r_1}} \left(\begin{array}{cccc|c}1&0&2&2&6\\0&1&-1&-1&-1\\0&4&-4&-5&-5\\0&-2&3&4&5\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c}1&0&2&2&6\\0&1&-1&-1&-1\\0&0&0&-1&-1\\0&0&1&2&3\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c}1&0&2&2&6\\0&1&-1&-1&-1\\0&0&1&2&3\\0&0&0&-1&-1\end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c}1&0&2&0&4\\0&1&-1&0&0\\0&0&1&0&1\\0&0&0&-1&-1\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c}1&0&0&0&2\\0&1&0&0&1\\0&0&1&0&1\\0&0&0&1&1\end{array}\right) \implies \mathbf{x}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix}2\\1\\1\\1\end{pmatrix}.$$

    d) V tomto prípade $\mathbf{x} = \mathbf{b}_2 = 0\cdot\mathbf{b}_1 + 1\cdot\mathbf{b}_2 + 0\cdot\mathbf{b}_3 + 0\cdot\mathbf{b}_4 \implies \mathbf{x}_{\mathcal{B}} = (0,1,0,0)^\top$.

14. Ako sa rieši príklad zo súboru tyzden-7/2.c)

    Odpoveď: $T\colon R^3 \to R^3$, $T(x_1,x_2,x_3) = (x_1 - 3x_2,\ 3x_1 + x_2 + x_3,\ 0)$. $\mathcal{E} = \{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3\}$ je štandardná báza; $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\mathbf{b}_3\}$, $\mathbf{b}_1 = (0,1,1)$, $\mathbf{b}_2 = (1,0,0)$; $\mathbf{b}_3 = (0,1,0)$. Napíšte matice $T_{\mathcal{E}\mathcal{E}}$, $T_{\mathcal{B}\mathcal{B}}$, $T_{\mathcal{E}\mathcal{B}}$, $T_{\mathcal{B}\mathcal{E}}$
    Definícia matice LO vzhľadom na bázy $\mathcal{B},\mathcal{D}$ je v súbore prednaska1.pdf na strane 22. Stĺpce matice $A = T_{\mathcal{E}\mathcal{E}}$ tvoria teda súradnice vektorov $T\mathbf{e}_1, T\mathbf{e}_2, T\mathbf{e}_3$ vzhľadom na štandardnú bázu.
    $T\mathbf{e}_1 = T(1,0,0) = (1,3,0) \implies A_{*1} = \begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix}$, $[T\mathbf{e}_2]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix}-3\\1\\0\end{pmatrix}$, $[T\mathbf{e}_3]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$,
    teda $T_{\mathcal{E}\mathcal{E}} = \begin{pmatrix}1&-3&0\\3&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$. Podobne dostaneme $T_{\mathcal{B},\mathcal{E}}$. Treba počítať obrazy bázy $\mathcal{B}$, dostaneme ich vyjadrené v štandardnej báze. $T\mathbf{b}_1 = T(0,1,1) = (-3,2,0)$, $T\mathbf{b}_2 = T(1,0,0) = (1,3,0)$, $T\mathbf{b}_3 = T(0,1,0) = (-3,1,0)$ a to stačí zapísať do stĺpcov, $T_{\mathcal{B},\mathcal{E}} = \begin{pmatrix}-3&1&-3\\2&3&1\\0&0&0\end{pmatrix}$. $T_{\mathcal{B}\mathcal{B}}$: Najprv rovnako vypočítame $T\mathbf{b}_1 = T(0,1,1)$, $T\mathbf{b}_2 = T(1,0,0) = (1,3,0)$, $T\mathbf{b}_3 = T(0,1,0) = (-3,1,0)$. do stpcov matice $T_{\mathcal{B}\mathcal{B}}$ potrebujeme napísať súradnice $T\mathbf{b}_1, T\mathbf{b}_2, T\mathbf{b}_3$ vzhľadom na $\mathcal{B}$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}0&1&0&-3&1&-3\\1&0&1&2&3&1\\1&0&0&0&0&0\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&0&0&0\\1&0&1&2&3&1\\0&1&0&-3&1&-3\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&0&0&0\\0&0&1&2&3&1\\0&1&0&-3&1&-3\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&0&0&0\\0&1&0&-3&1&-3\\0&0&1&2&3&1\end{array}\right)$$

    Dostali sme na pravej strane $T_{\mathcal{B}\mathcal{B}} = \begin{pmatrix}0&0&0\\-3&1&-3\\2&3&1\end{pmatrix}$, symbolicky (vektory píšeme do stĺpcov):
    $(\,\mathbf{b}_1\ \mathbf{b}_2\ \mathbf{b}_3 \mid T\mathbf{b}_1\ T\mathbf{b}_2\ T\mathbf{b}_3\,) \sim (\,I_3 \mid T_{\mathcal{B}\mathcal{B}}\,)$ a podobne $(\,\mathbf{b}_1\ \mathbf{b}_2\ \mathbf{b}_3 \mid T\mathbf{e}_1\ T\mathbf{e}_2\ T\mathbf{e}_3\,) \sim (\,I_3 \mid T_{\mathcal{E}\mathcal{B}}\,)$
    alebo obe matice naraz dostaneme pomocou ERO:
    $(\,\mathbf{b}_1\ \mathbf{b}_2\ \mathbf{b}_3 \mid T\mathbf{e}_1\ T\mathbf{e}_2\ T\mathbf{e}_3 \mid T\mathbf{b}_1\ T\mathbf{b}_2\ T\mathbf{b}_3\,) \sim (\,I_3 \mid T_{\mathcal{E}\mathcal{B}} \mid T_{\mathcal{B}\mathcal{B}}\,)$

15. Môžu v prvkoch bázy vyjst zlomky? napr $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1\}$, $\mathbf{b}_1 = (1/2, 1, 1/2)$?

    Odpoveď: Môžu. V tomto prípade $M = \operatorname{span}\{\mathbf{b}_1\} = \{a\,\mathbf{b}_1 : a \in R\}$. Aj $\{2\mathbf{b}_1\} = \{(1,2,1)\}$ je báza M.

16. Aký je postup riešenia k príkladu tyzden-3.pdf/6c?

   Odpoveď: Rozšírenú maticu tejto sústavy upravíme na redukovanú stupňovitú:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim_{r_2+r_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim_{\substack{r_3+r_2 \\ r_1+r_2}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

   Pripomínam, že v Z_2 "$+ = -$". x_3, x_4 si môžeme voliť, ale len zo Z_2, sú teda 4 moňosti. $P = \{(\ , \ , 0, 0); (\ , \ , 0, 1); (\ , \ , 1, 0); (\ , \ , 1, 1)\}$, x_1, x_2 vypočítame $x_1 = 1 + x_3 + x_4$, $x_2 = 1 + x_4$, dostaneme $P = \{(1, 1, 0, 0); P = (0, 0, 0, 1); P = (0, 1, 1, 0); P = (1, 0, 1, 1)\}$ (sústava má 4 riešenia).

17. Pri úlohe T5/2a) ak určím parametre $x_1 = a$, $x_3 = b$ a $x_4 = c$ vyjde mi výsledok ako vám $\mathcal{B}_1 = \{(1, -2, 0, 0); (0, 3, 1, 0); (0, 0, 0, 1)\}$. Ale ak určím parametre $x_2 = a$, $x_3 = b$, $x_4 = c$, vyjde mi $\mathcal{B}_2 = \{(-1/2, 1, 0, 0); (3/2, 0, 1, 0); (0, 0, 0, 1)\}$,ak prvé 2 prenásobim $\times(-2)$, dostanem $\mathcal{B}_3 = \{(1, -2, 0, 0); (-3, 0, -2, 0); (0, 0, 0, 1)\}$, ale druha štvorica už vyjde iná, ak ju prenásobím dvojkou $(3, 0, 2, 0)$ je to taktiež správne?

   Odpoveď: Áno, je to správne. Vo všetkých prípadoch je lineárny obal $\mathcal{B}$ ten istý priestor $M = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in R^4 \colon 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 0\}$ a tiež sú $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_3$ LNZ.

18. Ako sa počíta príklad tyzden-3.pdf/1c. Treba urobiť mod 3 pri každom kroku, ak mi vyjde napr. $-x_3$ budem mať $2x_3$ alebo to stačí spraviť iba na konci algoritmu?

   Odpoveď: Oba postupy alebo ich kombinácia sú správne, v tomto prípade Určte $a(x)$, $b(x)$, pre ktoré $\gcd(f_1(x), f_2(x) = a(x)f_1(x) + b(x)f_2(x)$, $f_1(x) = x^7 + x^5 + x^4 + x^2 + x + 1$, $f_2(x) = x^4 + x^2 + x + 1$ v $P(Z_3)$.

$$\begin{array}{lll} f_1 : f_2 & (x^7 + x^5 + x^4 + x^2 + x + 1) : (x^4 + x^2 + x + 1) = x^3 & \\ & -\underline{(x^7 + x^5 + x^4 + x^3)} & \\ & \quad - x^3 + x^2 + x + 1 = f_3 & \underline{f_3 = f_1 - x^3 f_2} \\ f_2 : f_3 & (x^4 + x^2 + x + 1) : (-x^3 + x^2 + x + 1) = -x - 1 & \\ & -\underline{(x^4 - x^3 - x^2 - x)} & \\ & \quad x^3 + 2x^2 + 2x + 1 & \\ & \quad -\underline{(x^3 - x^2 - x - 1)} & \\ & \quad 3x^2 + 3x + 2 = 2 = f_4 & \underline{f_4 = f_2 + (x+1) f_3} \end{array}$$

   A teraz spätne dosadzujeme

$$\gcd(f_1, f_2) = f_4 = f_2 + (x+1)f_3 = f_2 + (x+1)[f_1 - x^3 f_2] = f_2[1 + (x+1)(-x^3)] + (x+1)f_1 = (x+1)f_1 + [1 - x^4 - x^3]f_2 = \underbrace{(x+1)}_{a(x)} f_1 + \underbrace{(2x^4 + 2x^3 + 1)}_{b(x)} f_2$$

19. Ak upravujem maticu v poli Z_3 vždy keď dostanem v matici záporne číslo, tak urobím na dané číslo (mod 3). Je tento postup správny?

   Odpoveď: Áno, je to správne. Pri ERO v Z_3 je vhodné počítať stále so vzťahmi $-1 = 2 \pmod 3$, $-2 = 1 \pmod 3$, $\frac{1}{2} = 2 \pmod 3$, $2 \times 2 = 1 \pmod 3$.

20. Ako sa robí skúška správnosti pri hermitovej metode?

   Odpoveď: Riešenie dosadíte (aj s parametrami) do ľavých strán rovníc, overíte, že sa rovnajú pravým stranám. Navyše, skontrolujete, či $\det U = \pm 1$.

21. Ako sa rieši príklad T2/10a, rozložte $f(x) = x^2 + x + 1 \in P(K)$ na súčin ireduciilných ($K = C, R, Z_2, Z_3, Z_5$).

   Odpoveď: Rozložiť to môžeme iba na súčin polynómov stpňa 1: $f = (x - c_1)(x - c_2)$ alebo je f ireducibilny. nad C: $c_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{i\sqrt{3}}{2}$, $f(x) = (x + \frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2})(x + \frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2})$,
   v R sa nedá rozložiť. V Z_2 je $f(0) = f(1) = 1 \neq 0$, teda ani tam sa nedá rozložiť.
   V $K = Z_3$ je $f(1) = 1 + 1 + 1 = 0$, preto $(x - 1)|f(x)$. $f(x) = (x - 1)^2 = x^2 - 2x + 1 = x^2 + x + 1$ (lebo $-2 = 1 \pmod 3$). $x - 1 = x - 1 + 3 = x + 2$, takže dobre je aj $f(x) = (x - 1)(x + 2)$.
   Ak $K = Z_5$, $f(0) = 1$, $f(1) = 3$, $f(2) = 2$, $f(3) = 3$, $f(4) = 1$, f nemá koreň, nedá sa rozložiť.

22 Príklad T1/1c) $\frac{1}{z+i} - \frac{1+i}{z} = 1$ mi vyšiel $z_{1,2} = i(-1 \pm \sqrt{i})$, inak ako je vo výsledku.

   Odpoveď: Nemáte to dopočítané. $\sqrt{i}$ je riešenie rovnice $z^2 = i = e^{i\frac{\pi}{2}}$, teda $\sqrt{i} = e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}$.

23 Ako sa rieši uloha tyzden3.pdf/2. Má $f(x)$ ireducibilný deliteľ násobnosti viac ako 1?

Odpoveď: Treba zistiť, stupeň polynómu $\deg \gcd(f, f')$.

a) $f(x) = x^4 + 4x^3 + 10x^2 + 12x + 9$, $f' = 4x^3 + 12x^2 + 20x + 12 = 4(x^3 = 3x^2 + 5x + 3) = 4g(x)$. Všetky delitele f' sú aj delitele $g(x) = x^3 = 3x^2 + 5x + 3$, Počítame teda $\gcd(f, g)$:

$$
\begin{aligned}
f(x) : g(x) =&(x^4 + 4x^3 + 10x^2 + 12x + 9) : (x^3 + 3x^2 + 5x + 3) = x + 1 \\
&-\underline{(x^4 + 3x^3 + 5x^2 + 3x)} \\
&\quad x^3 + 5x^2 + 9x + 9 \\
&\quad - \underline{(x^3 + 3x^2 + 5x + 3)} \\
&\quad 2x^2 + 4x + 6 = 2(x^2 + 2x + 3) \\
&(x^3 + 3x^2 + 5x + 3) : (x^2 + 2x + 3) = x + 1 \\
&-\underline{(x^3 + 2x^2 + 3x)} \\
&\quad x^2 + 2x + 3 \\
&\quad - \underline{(x^2 + 2x + 3)} \\
&\quad 0
\end{aligned}
$$

Teda $\gcd(f, f') = x^2 + 2x + 3 \implies f(x)$ má ireducibilný deliteľ násobnosti viac ako 1.

c) $f(x) = x^7 + x^5 + x^4 + x^2 + x + 1 \in P(Z_2)$, $f' = 7x^6 + 5x^4 + 4x^3 + 2x + 1 = x^6 + x^4 + 1$, aj koeficienty f' sme počítali mod 2. Navyše v Z_2 "$+ = -$"

$$
\begin{aligned}
&(x^7 + x^5 + x^4 + x^2 + x + 1) : (x^6 + x^4 + 1) = x \\
&\underline{(x^7 + x^5 + x)} \\
&\quad x^4 + x^2 + 1 \\
&(x^6 + x^4 + 1) : (x^4 + x^2 + 1) = x^2 \\
&\underline{(x^6 + x^4 + x^2)} \\
&\quad x^2 + 1 \\
&(x^4 + x^2 + 1) : (x^2 + 1) = x^2 \\
&\underline{(x^4 + x^2)} \\
&\qquad 1 = \gcd(f, f'),\ \deg 1 = 0 \implies f \text{ nemá ired. deliteľ násobnosti } > 1
\end{aligned}
$$

d) Ten istý polynóm, ale v $P(Z_3)$, $f'(x) = x^6 + 2x^4 + x^3 + 2x + 1$, Aj $\deg \gcd(f, f') = 0 \implies$ nemá.

24 Ako sa rata uloha 11 z tyzden-4-5.pdf? Riešte rovnicu

a. $\begin{vmatrix} (x-2) & (2-x)^2 \\ (1-x) & (x-1) \end{vmatrix} = 0$ b. $\begin{vmatrix} 1 & -1 & x+2 \\ x-1 & 1-x & -2 \\ x & x & 1 \end{vmatrix} = 0$

Odpoveď: Determinanty vypočítame pomocou vhodných ERO, alebo ESO:

a. Z r_1 výjmeme $(x-2)$, z r_2 $1-x$ $((1-x)^2 = (x-1)^2)$:

$$\begin{vmatrix} (x-2) & (2-x)^2 \\ (1-x) & (x-1) \end{vmatrix} = (x-2)(1-x)\begin{vmatrix} 1 & x-2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = (x-2)(1-x)[-1-(x-2)] = (1-x)^2(x-2) = 0$$

$\implies x_{1,2} = 1,\ x_3 = 2.$

b. $s_1 = s_1 + s_2$ determinant nezmení:

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & x+2 \\ 0 & 1-x & -2 \\ 2x & x & 1 \end{vmatrix} = 2x\begin{vmatrix} -1 & x+2 \\ 1-x & -2 \end{vmatrix} =_{r_1+r_2}= 2x\begin{vmatrix} -x & x \\ 1-x & -2 \end{vmatrix} = 2x^2\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1-x & -2 \end{vmatrix} = -x^2(x+1) = 0$$

$\implies x_{1,2} = 0,\ x_3 = -1$

25 Ako sa počíta $(x)^{-1}$ v $P(Z_2)/(x^2 + x + 1)$?

Odpoveď: $x^2 + x + 1$ je ireducibilný polynóm, preto $\gcd(x, x^2 + x + 1) = 1$. Pomocou Euklidovho algoritmu: $(x^2+x+1) : x = x+1$, zvyšok $r = 1$, alebo $x^2+x+1 = x(x+1)+1$, pretože $x^2+x+1 = 0 \pmod{x^2+x+1}$, $x(x+1) = 1 \pmod{x^2+x+1}$, dostaneme $\underline{(x)^{-1} = x+1}$.

26 Ako správne vypočítať úlohu 3b) v 5. týždni, priklady.pdf?

Odpoveď: $L = P_2(R)$ je priestor všetkých polynómov najviac 2. stupňa. Polynóm $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ je určený usporiadanou trojicou (a_0, a_1, a_2).
$\mathbf{b}_1(x) \equiv (0,-1,1)$, $\mathbf{b}_2(x) \equiv (1,1,0)$, $\mathbf{b}_3(x) \equiv (1,0,0)$; $\mathbf{u}(x) \equiv (1,1,1)$. Ďalej podobne ako v odpovedi 13.

27 Ako sa spráávne rieši príklad 6. z dokumentu tyzden8-9.pdf?
Vypočítajte stopu, vlastné čísla a vlastné vektory matice $A \in C^{n\times n}$.

Odpoveď: Stopa matice $A = (a_{ij}) \in C^{n\times n}$ je $\operatorname{trace} A = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$ a platí tiež: $\operatorname{trace} A = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n$, t.j. súčet vlastných čísel matice A.

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\det A = 0 \implies \lambda_1 = 0$ je vlastné číslo matice A,
$\operatorname{trace} A = 1 + 1 = 2 = \lambda_1 + \lambda_2$, teda $\lambda_2 = 2$, Vlastné vektory:
pre $\lambda_1 = 0$: $A - \lambda_1 I = A \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \implies \mathbf{v}_1 = p\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, p \neq 0$
pre $\lambda_2 = 2$: $A - \lambda_2 I = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \implies \mathbf{v}_2 = p\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, p \neq 0$

b) $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\operatorname{trace} A = 0$, v tomto prípade uhádnuť jedno vlastné číslo nevieme, hľadáme teda korene charakteristického polynómu
$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2 = 0 \implies \lambda_{1,2} = \pm\sqrt{2}$
$\lambda_1 = \sqrt{2}$: $A - \lambda_1 I = \begin{pmatrix} -1-\sqrt{2} & 1 \\ 1 & 1-\sqrt{2} \end{pmatrix} \sim_{r_2-(1-\sqrt{2})r_1} \begin{pmatrix} -1-\sqrt{2} & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \implies \mathbf{v}_1 = p\begin{pmatrix} 1 \\ 1+\sqrt{2} \end{pmatrix}, p \neq 0$
$\lambda_2 = -\sqrt{2}$: $A - \lambda_1 I = \begin{pmatrix} -1+\sqrt{2} & 1 \\ 1 & 1+\sqrt{2} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1+\sqrt{2} & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \implies \mathbf{v}_2 = p\begin{pmatrix} 1 \\ 1-\sqrt{2} \end{pmatrix}, p \neq 0$

c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\det A = 0 \implies \lambda_1 = 0$ je vlastné číslo matice A,

Vlastné vektory pre $\lambda = 0$: $(A - \lambda I) \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \implies$ existujú 2 lineárne nezávislé vlastné vektory,
napr. $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \implies \lambda_2 = \lambda_1 = 0$ a príslušné vlastné vektory sú
$\mathbf{v} = p\mathbf{v}_1 + q\mathbf{v}_2$, $(p, q) \neq (0, 0)$. Stopa $\operatorname{trace} A = 1 + 1 + 1 = 3 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \implies \lambda_3 = 3$
$(A - \lambda_3 I) = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & -3 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \implies \mathbf{v}_3 = p\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, p \neq 0$

28 Ako sa rieši príklad tyzden8-9.pdf/8: Vypočítajte stopu a vlastné čísla matice A a rozhodnite, či je diagonalizovateľná.

Odpoveď:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Z pr. 6a) vieme $\operatorname{trace} A = 2$, $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2$ a vlastné vektory $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ je báza priestoru $C^{2\times 1}$ zložená z vlastných vektorov matice A, preto je A diagonalizovateľná. $A = PDP^{-1}$, kde $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ a $P = (\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.
Stĺpce matice P sú vlastné vektory prislúchajúce k vlastným číslam matice A, v prvom stĺpci je $\mathbf{v}_1$, lebo v prvom stĺpci matice D je λ_1, v druhom stĺpci je $\mathbf{v}_2$, lebo v druhom stĺpci matice D je λ_2. Alebo inak, ak $A = T_{\mathcal{E}}$ je matica lineárneho operátora T vzhľadom na štandardnú bázu, tak $D = T_{\mathcal{D}}$ je matica toho istého operátora T vzhľadom na bázu $\mathcal{B}$ a matica prechodu $P = I_{\mathcal{B}\mathcal{E}}$.

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. $\det(A - \lambda I) = (1 - \lambda)^2$, teda jediné vlastné číslo matice A je dvojnásobné $\lambda_{1,2} = 1$. Počítame vl. čísla
$(A - \lambda I) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \implies \mathbf{v} = p\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, p \neq 0$, t.j. nenulové riešenie sústavy $\begin{array}{ll} 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 & = 0 \\ 1 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 & = 0 \end{array}$. Teda nevieme nájsť bázu C^2 zloženú z vlastných vektorov matice A. Takže A nie je diagonalizovateľná.

Podobne sa riešia aj príklady tyzden8-9.pdf/8c), a 9.

29 prikladyLA2.pdf T9/1 a) c). Nevychádza mi skúška ($A = PJP^{-1}$). Ako sa tento typ príkladov rieši?

Odpoveď: $PJP^{-1} \neq A$ pravdepodobne preto, že stĺpce matice P nezodpovedajú stĺpcom matice J:

$A = T_{\mathcal{E}\mathcal{E}}$, Nájdite bázu $\mathcal{B}$ zloženú z reťazcov zovšeobecnených vlastných vektorov matice A a maticu P, pre ktorú $A = PJP^{-1}$, $J = T_{\mathcal{B}\mathcal{B}}$ (J je Jordanov tvar matice A)

a) $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$. Najprv nájdeme vl. čísla matice A

$$\begin{vmatrix} -2-\lambda & 2 \\ 2 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda+2)^2 - 4 = \lambda^2 + 4\lambda = \lambda(\lambda+4) = 0 \implies \lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = -4$$

Matica má 2 rôzne vl. č. Preto $\exists$ 2 LNZ vl. vektory:
$\lambda_1 = 0$, $(A - \lambda_1 I) = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \implies \mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (nepotrebujeme všetky vl. vektory, ostatné sú aj tak LZ s $\mathbf{b}_1$)
$\lambda_2 = -4$, $(A - \lambda_2 I) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \implies \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ Matica $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$$

V prvom stĺpci matice J je $j_{11} = \lambda_1$, prvý stĺpec matice P je vl. vektor $\mathbf{b}_1$, $j_{22} = \lambda_2$ a $P_{*2} = \mathbf{b}_2$.

$$PJP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = A$$

Aby platilo $A = PJP^{-1}$ stĺpce matice P musia zodpovedať reťazcom zovšeobecnených vl. v. matice A. Keby sne stĺpce matice P vymenili

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}\frac{1}{-2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \neq A$$

c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, $A^0\mathbf{b} = \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $A\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $A^2\mathbf{b} = A(A\mathbf{b}) = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$, $A^3\mathbf{b} = A(A^2\mathbf{b}) = \begin{pmatrix} 20 \\ 8 \\ 12 \end{pmatrix}$
$m_{A,\mathbf{b}} = a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + a_3\lambda^3$ hľadáme ako riešenie sústavy:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 8 & 20 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & 4 & 12 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 8 & 20 \\ 0 & -1 & -4 & -12 \\ 0 & 1 & 4 & 12 \end{pmatrix}$$

Aby bolo riešenie, nenulový pol. čo najmenšieho stupňa, volíme $a_3 = 0$, $a_2 = 1$ a dopočítame $a_1 = -4$, $a_0 = 4$, $m_{A,\mathbf{b}} = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0 \implies \lambda_{1,2} = 2$. $\operatorname{trace} a = 6 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \implies \lambda_3 = 2$

$\lambda = 2$ je jediné vlastné číslo matice A, vl. vektory:

$$A - 2I = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -2 & 3 & 2 \end{pmatrix} \sim_{\substack{r_2+r_1 \\ r_3-2r_1}} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Vlastný podpriestor je jednorozmerný, budeme teda hladať reťazec: $\mathbf{b}_3 = P_{*3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $(A - 2I)\mathbf{b}_2 = \mathbf{b}_3$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ -2 & 3 & 2 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

Znova zvolíme jedno z riešení, napr. $P_{*2} = \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ a $P_{*1} = \mathbf{b}_1$ z rovnice $(A - 2I)\mathbf{b}_1 = \mathbf{b}_2$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \end{array}\right)$$

$\mathbf{b}_1 = P_{*1} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, teda $P = (P_{*1}\ P_{*2}\ P_{*13}) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $J = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = J_3(2)$

T9/1b) $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$, $\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -2-\lambda & 0 \\ 3 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda+2)^2$, jediné vlastné číslo je $\lambda = -2$, $A - 2I = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \implies \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} = P_{*2}$ (ostatné vl vektory sú násobkom $\mathbf{v}$) a potrebujeme ešte zovšeobecnený vl. vektor
$\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{array}\right) \implies P_{*1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $J = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

T9/1e $A = \begin{pmatrix} 6 & -7 & 4 \\ 1 & -2 & -1 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 2 & 9 & 101 & 999 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 10 & 100 & 1000 \end{pmatrix} \sim_{r_1 - r_3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 10 & 100 & 998 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 11 & 99 & 999 \end{pmatrix}$,
odtiaľ $a_3 = 0$, $a_2 = 1$, $a_1 = -9$, $a_0 = 8$, $m_{A,\mathbf{b}}(\lambda) = \lambda^2 - 9\lambda - 10 = (\lambda - 10)(\lambda + 1)$, trace $A = 8$, teda vl.čísla sú: $\lambda_1 = 10$, $\lambda_{2,3} = -1$ Na určenie J a P budeme potrebovať dva vektory pre $\lambda = -1$ a jeden pre $\lambda = 10$

$$A + I = \begin{pmatrix} 7 & -7 & 4 \\ 1 & -1 & -1 \\ 6 & -6 & 5 \end{pmatrix} \sim_{\substack{r_3 - 6r_2 \\ r_1 - 7r_2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 11 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 11 \end{pmatrix} \implies P_{*3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 7 & -7 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 6 & -6 & 5 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 11 & -6 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 11 & -6 \end{array}\right) \implies P_{*2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6/11 \\ -6/11 \end{pmatrix}$$

P_{*1} bude prvý stĺpec matice P, vlasstné číslo patriace k $\lambda = 10$

$$\begin{pmatrix} -4 & -7 & 4 \\ 1 & -12 & -1 \\ 6 & -6 & -6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -4 & -7 & 4 \\ 1 & -12 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & -11 & 0 \\ 0 & -11 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \implies P_{*1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 6/11 & 1 \\ 1 & -6/11 & 0 \end{pmatrix}$, $J = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

---

30 Ako urobiť ulohu prikladyLA2, T3/5?

Odpoveď: Pole, kt. má presne a) 8, b) 9, c) 13, d) 18 prvkov
d) Počet prvkov konečného poľa je mocnina prvočísla. 18 nie je mocnina prvočísla $\implies \nexists$
a) $8 = 2^3 \implies F = P(Z_2)/(x^3 + x + 1)$ — (vysvetlenie množina $\forall$ zvyškov po delení ireducib. polynómom $(x^3 + x + 1)$, t.j. $F = \{ax^2 + bx + c \; a, b, c \in Z_2\} = \{0, 1, x, x + 1, x^2, x^2 + x, x^2 + x + 1, x^2 + 1\}$)
b) $9 = 3^2$, $F = P(Z_3)/(z^2 + 1)$ c) Z_{13}