v poliach R a C

1. Daná je matica $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$. Určte a) [1] stopu matice A,

   b) [3] vlastné čísla matice A, c) [5] Diagonálnu maticu D a maticu P, pre ktorú $A = PDP^\top$,

   d) [1] minimálny polynóm matice A.

2. [6] Nájdite rovnicu priamky $y(x) = kx + q$, pre ktorú je súčet $\sum_{i=-2}^{2} |y(x_i) - y_i|^2$ najmenší. Hodnoty y_i sú v tabuľke →

x_i	-2	-1	0	1	2
y_i	-1	0	2	3	4

3. [5] Riešte binomickú rovnicu $z^4 = -4$.
   Výsledok napíšte v exponenciálnom alebo goniometrickom tvare a znázornite.

4. [7] Nech $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3, \mathbf{b}_4\}$ je báza LP $(L, +, \cdot)$ nad poľom R a pre lineárny operátor $T\colon L \to L$ platí $T\mathbf{b}_1 = 2 \cdot \mathbf{b}_1$, $T\mathbf{b}_2 = \mathbf{0}$, $T\mathbf{b}_3 = 2 \cdot \mathbf{b}_1 - 3 \cdot \mathbf{b}_3$, $T\mathbf{b}_4 = \mathbf{b}_1 + 2 \cdot (\mathbf{b}_3 + \mathbf{b}_4)$. Napíšte

   a) $\dim L$ b) maticu $T_{\mathcal{B}}$. c) $\dim \ker T$ d) $\dim \operatorname{ran} T$

5. [10] Lineárne zobrazenie $T\colon R^2 \to R^2$ zobrazí bod $A = [x, y]$ na bod súmerný s bodom A podľa priamky $p \equiv y = -3x$. Určte jeho maticu vzhľadom na štandardné bázy.

V konečných poliach

6. Daný je polynóm $f(x) = x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 \in P(Z_2)$.

a) [5] Pomocou Euklidovho algoritmu zistite, či má polynóm $f(x)$ ireducibilný deliteľ násobnosti aspoň 2.

b) [3] Napíšte rozklad polynómu f na súčin ireducibilných polynómov (nad Z_2).

7. [8] V poli Z_2 riešte sústavu lineárnych rovníc. Rozšírenú maticu sústavy najprv upravte na redukovanú stupňovitú.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_5 &= 0 \\ x_1 + x_3 + x_4 &= 1 \\ x_2 + x_3 + x_4 &= 1 \end{aligned}$$

8. [8] Určte všetky vlastné čísla a vlastné vektory matice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in Z_3^{3\times 3}$

9. [5] V poli Z_{41} určte prvok inverzný (vzhľadom na násobenie) k prvku $a = 12$.

10 [3] Napíšte pole, ktoré má presne a) 9 prvkov, b) 28 prvkov

* [5] Dokážte tvrdenie: Nech $A \in R^{3\times 3}$ je symetrická matica, $\mathbf{b} \in R^{3\times 1}$. Potom $(A^2\mathbf{b} = \mathbf{0} \implies A\mathbf{b} = 0)$.

Riešenie

1. $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$. 1a) $\mathrm{tr}(A) = 3$, -1 a 0 sú očividne vlastné čísla $\Longrightarrow \sigma(A) = (-1, 0, 4)$,

teda c) $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$. Stĺpce matice P sú vlastné vlastné vektory dĺžky 1: $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

d) $m_A(\lambda) = (\lambda+1)\lambda(\lambda-4) = \lambda^3 - 3\lambda^2 - 4\lambda$

2. $p \equiv y(x) = kx + q$,

x_i	-2	-1	0	1	2
y_i	-1	0	2	3	4

$$\begin{aligned} -2k + q &= -1 \\ -k + q &= 0 \\ q &= 2 \\ k + q &= 3 \\ 2k + q &= 4 \end{aligned} \qquad A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad A\begin{pmatrix} k \\ q \end{pmatrix} = \mathbf{b} \Longrightarrow A^\top A \begin{pmatrix} k \\ q \end{pmatrix} = A^\top \mathbf{b}$$

$$\begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 8 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{matrix} k = 1,3 \\ q = 1,6 \end{matrix} \qquad p \equiv y = 1,3x + 1,6$$

3. $z^4 = -4 = 4e^{i(\pi + 2k\pi)} \Longrightarrow z_k = \sqrt{2}e^{i(\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2})}$, $k = 0, 1, 2, 3$.
$z_0 = 1 + i$ obrázok (**1 bod**)

4. $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3, \mathbf{b}_4\}$ je báza LP $(L, +, \cdot)$, $T\colon L \to L$ platí
$T\mathbf{b}_1 = 2 \cdot \mathbf{b}_1$, $T\mathbf{b}_2 = \mathbf{0}$, $T\mathbf{b}_3 = 2 \cdot \mathbf{b}_1 - 3 \cdot \mathbf{b}_3$, $T\mathbf{b}_4 = \mathbf{b}_1 + 2 \cdot (\mathbf{b}_3 + \mathbf{b}_4)$.

a) $\dim L = 4$ b) $T_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. c) $\dim \ker T = 1$ d) $\dim \mathrm{ran}\, T = 3$.

5. $p \equiv y = -3x$.
$A_1 = [1, 0] \to B_1 = [x, y] \Longrightarrow S = \left[\frac{x+1}{2}, \frac{y}{2}\right] \in p \Longrightarrow \frac{y}{2} = -3\frac{x+1}{2} \Longrightarrow 3x + y = -3$ (1)
$\vec{AB} = (x - 1, y) \perp (1, -3) \iff x - 1 - 3y = 0 \Longrightarrow x - 3y = 1$ (2)
Riešením sústavy (1),(2) dostaneme (2) $\Longrightarrow x = 1 + 3y$, $3(1 + 3y) + y = -3 \Longrightarrow y = -\frac{3}{5}$, $x = -\frac{4}{5}$.

Podobne $A_2 = [0, 1] \to B_2 = [x, y] \Longrightarrow \left[\frac{x}{2}, \frac{y+1}{2}\right] \in p \Longrightarrow y + 1 = -3x \Longrightarrow 3x + y = -1$,
$(x, y - 1) \perp (1, -3) \Longrightarrow x = 3y - 3$ a z prvej rovnice $9y - 9 + y = -1 \Longrightarrow y = \frac{4}{5}, x = -\frac{3}{5}$.
$T_{\mathcal{E}} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -4 & -3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$.

6a. $f_1 = f(x) = x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 \in P(Z_2)$, $f_2 = f' = x^4 + x^2 + 1$

$$(x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) : (x^4 + x^2 + 1) = x + 1$$
$$\underline{x^5 + x^3 + x}$$
$$\underline{x^4 + x^2 + 1}$$
$$0 \Longrightarrow \gcd(f, f') = f', \text{ t.j. } f \text{ má ireducibilný deliteľ násobnosti } > 1\,.$$

b) $f = (x + 1)(x^4 + x^2 + 1)$, treba ešte rozložiť $g(x) = x^4 + x^2 + 1$, $g(x) = (x^2 + x + 1)^2$,
$\underline{f = (x + 1)(x^2 + x + 1)^2}$

7.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim_{R_2+R_1} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim_{R_3+R_2} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim_{\substack{R_2+R_3 \\ R_1+R_3}}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim_{R_1+R_2} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \implies P = \{(1,1,0,0,0) \\ (0,0,0,1,0) \\ (0,0,1,0,0) \\ (1,1,1,1,0)\}$$

8.

$$\lambda = 0\colon \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim_{R_2+R_1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \implies \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda = 1\colon \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim_{R_2+2R_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim_{R_3+2R_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \implies \lambda = 1 \text{ nie je v.č.}$$

$$\lambda = 2\colon \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \implies \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_4 = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

9. $n_1 = 41$, $n_2 = 12$
$n_1 = 3n_2 + 5$, $5 = n_3 = n_1 - 3n_2$
$n_2 = 2n_3 + 2$, $2 = n_4 = n_2 - 2n_3$
$n_3 = 2n_4 + 1$, $1 = n_5 = n_3 - 2n_4 = n_3 - 2(n_2 - 2n_3) = 5n_3 - 2n_2 = 5(n_1 - 3n_2) - 2n_2 = 5n_1 - 17n_2$
$n_2^{-1} \equiv -17 \equiv -17 + 41 = 24 \pmod{41}$

10. a) $P(Z_3)/(x^2+1)$ (namiesto x^2+1 môže byť iný ireduc. polynóm stupňa 2), b) $\nexists$ lebo $28 = 4 \cdot 7$ nie je mocnina prvočísla.

* [5] Dokážte tvrdenie: Nech $A \in R^{n \times n}$ je symetrická matica, $\mathbf{b} \in R^{n \times 1}$.
Potom $(A^2\mathbf{b} = \mathbf{0} \implies A\mathbf{b} = 0)$.

Dôkaz.

$$A^2\mathbf{b} = \mathbf{0} \implies \|A\mathbf{b}\|^2 = (A\mathbf{b}, A\mathbf{b}) = (A\mathbf{b})^\top A\mathbf{b} = \mathbf{b}^\top A^\top A\mathbf{b} = \mathbf{b}^\top AA\mathbf{b} = \mathbf{b}^\top A^2\mathbf{b} = 0\,.$$

$\|A\mathbf{b}\|^2 = 0 \iff A\mathbf{b} = \mathbf{0}$.