Skúška z matematiky 3.

Meno a priezvisko: **23. júna 2009**

Počet bodov za semester:

	1.	**2.**	**3.**	**4.**	$\sum$	$\sum_{T+P}$
Teória						
Príklady						**-**

$\sum$ **celkom**	**Známka**

Teória

1. (a) Daná je funkcia $f(z) = \ln(iz+1)$. Určte jej definičný obor a vypočítajte $f(\sqrt{3})$. (2 body)
   (b) Formulujte vetu o diferencovateľnosti (derivácii) funkcie komplexnej premennej v bode (Cauchyho-Riemannove rovnice). (3 body)
2. (a) Definujte Taylorov rad funkcie komplexnej premennej. (2 body)
   (b) Formulujte vetu o rozklade analytickej funkcie do Taylorovho radu. (3 body)
3. (a) Charakterizujte typy izolovaných singulárnych bodov funkcie komplexnej premennej. (3 body)
   (b) Napíšte vetu o výpočte rezídua v póle m-tého rádu. (2 body)
4. (a) Napíšte vetu o analytickosti Laplaceovej transformácie. (3 body)
   (b) Napíšte tvrdenie o $\mathcal{L}\left(e^{at}f(t)\right)$, $a \in \mathbf{C}$ pre Laplaceovu transformáciu. (2 body)

Príklady

1. Vypočítajte analytickú funkciu $f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ na $\mathbf{C}$ ak je daná funkcia $u(x,y) = e^x(x\cos y - y\sin y)$, pričom $f(1) = e$. (10 bodov)
2. (a) Vypočítajte $\int_C \frac{(x+y)}{x^2+y^2}dx - \frac{(x-y)}{x^2+y^2}dy$, kde C je časť kružnice $x^2+y^2 = a^2$ od bodu $(0,a)$ po bod $(a,0)$. (5 bodov)
   (b) Rozložte funkciu $f(z) = \frac{1}{z(1-z)}$ do Laurentovho radu na medzikruží $P(0,1,\infty) = \{z \in \mathbf{C} : 1 < |z| < \infty\}$. (5 bodov)
3. Použitím Cauchyho vety o rezíduách vypočítajte

$$\int_C \left(\frac{\cos z}{z^3} + z^2 e^{\frac{z-1}{z}}\right) dz,$$

kde C je kladne orientovaná kružnica $|z| = \frac{1}{2}$. (10 bodov)

4. Použitím Laplaceovej transformácie riešte začiatočnú úlohu

$$x'' + x = f(t),\ x(0+) = 1,\ x'(0+) = 0 \text{ ak } f(t) = \begin{cases} 0 & t \notin \langle 0, 5\rangle \\ 2 & t \in \langle 0, 5\rangle \end{cases} . \quad \text{(10 bodov)}$$

Riešenie skúšky z M3op dňa 23.6.2009

Teória

1. (a) $f(z)=\ln(iz+1)$. $D(f): iz+1=0 \Longrightarrow z=i,\ D(f)=\mathbf{C}\setminus\{i\}$ $\boxed{\text{1 bod}}$
   $f\left(\sqrt{3}\right)=\ln(1+\sqrt{3}i)=\ln\left|1+\sqrt{3}i\right|+i\frac{\pi}{3}=\ln 2+i\frac{\pi}{3}$. $\boxed{\text{1 bod}}$
   (b) Funkcia $f: A\,(\subset \mathbf{C}) \longrightarrow \mathbf{C}$, $f(z)=u(x,y)+i\,v(x,y)$, (A je otvorená) je diferencovateľná v bode $a=a_1+ia_2$ vtedy a len vtedy ak sú funkcie $u(x,y)$ a $v(x,y)$ diferencovateľné v bode $\mathbf{a}=(a_1,a_2)$ $\boxed{\text{1 bod}}$ a platia podmienky : $\frac{\partial u(\mathbf{a})}{\partial x}=\frac{\partial v(\mathbf{a})}{\partial y}$, $\frac{\partial u(\mathbf{a})}{\partial y}=-\frac{\partial v(\mathbf{a})}{\partial x}$, $\boxed{\text{1 bod}}$ potom $f'(a)=\frac{\partial u(\mathbf{a})}{\partial x}+i\frac{\partial v(\mathbf{a})}{\partial x}=\frac{\partial v(\mathbf{a})}{\partial y}-i\frac{\partial u(\mathbf{a})}{\partial y}$. $\boxed{\text{1 bod}}$

2. (a) Nech funkcia komplexnej premennej f má v bode $a\in\mathbf{C}$ derivácie všetkých rádov. Potom mocninový rad

$$f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(z-a)+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n$$

   nazývame Taylorovým radom funkcie f v bode a. $\boxed{\text{2 body}}$
   (b) Nech f je analytická funkcia v oblasti D. Nech $a\in D$ a $K(a,R)\subset D$. $\boxed{\text{1 bod}}$ Potom existuje mocninový rad $\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n$ taký, že $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n$, pre každé $z\in K(a,R)$, $\boxed{\text{1 bod}}$ pričom $c_n=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}}d\xi$,kde C je jednoduchá, po častiach hladká, uzavretá krivka, kladne orientovaná, ktorá leží v $K(a,r)$ tak, že $a\in IntC$. $\boxed{\text{1 bod}}$

3. (a) Nech $z=a\in D$ je izolovaný singulárny bod funkcie $f: D\,(\subset\mathbf{C})\longrightarrow \mathbf{C}$. Potom ak

   a) existuje konečná limita $\lim_{z\longrightarrow a}f(z)$, tento bod nazývame odstrániteľný singulárny bod $\boxed{\text{1 bod}}$

   b) ak $\lim_{z\longrightarrow a}f(z)=\infty$, potom bod $z=a$ nazývame pól $\boxed{\text{1 bod}}$

   c) ak $\lim_{z\longrightarrow a}f(z)$ neexistuje, bod $z=a$ nazývame podstatne singulárny bod $\boxed{\text{1 bod}}$

   (b) Nech $z=a$ je pól m-tého rádu funkcie f. $\boxed{\text{1 bod}}$ Potom $\operatorname{res}_{z=a}f(z)=\frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\longrightarrow a}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left[(z-a)^m f(z)\right]$. $\boxed{\text{1 bod}}$

4. (a) Pre každý originál $f(t)$ je zobrazenie $F(p)=\int_0^{\infty}f(t)\,e^{-pt}dt$, v polrovine $\operatorname{Re}p>\alpha_0$, kde α_0 je index rastu funkcie $f(t)$ $\boxed{\text{1 bod}}$, analytickou funkciou $\boxed{\text{1 bod}}$, pričom $F'(p)=-\int_0^{\infty}tf(t)\,e^{-pt}dt$, $\operatorname{Re}p>\alpha_0$ a $\lim_{\operatorname{Re}p\longrightarrow\infty}F(p)=0$. $\boxed{\text{1 bod}}$
   (b) Nech f je originál s indexom rastu α_0, $a\in\mathbf{C}$ a $\mathcal{L}(f)=F$. $\boxed{\text{0,5 bodu}}$ Potom funkcia $g:\mathbf{R}\longrightarrow\mathbf{C}$, $g(t)=e^{at}f(t)$je originál s indexom rastu $\alpha_0+\operatorname{Re}a$, $\boxed{\text{1 bod}}$ pričom $\mathcal{L}\left[e^{at}f(t)\right]=F(p-a)$, $\operatorname{Re}p>\alpha_0+\operatorname{Re}a$. $\boxed{\text{0,5 bodu}}$

Príklady

1. $u(x,y) = e^x (x\cos y - y\sin y)$,pričom $f(1) = e$.

$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ $\boxed{\text{1 bod}}$, $\frac{\partial u}{\partial x} = e^x (x\cos y - y\sin y + \cos y)$, $\frac{\partial u}{\partial y} = e^x(-x\sin y - \sin y - y\cos y)$ $\boxed{\text{2 body}}$ $\Longrightarrow$

ak je aspoň jedna derivácia chybne vypočítaná, ďalej už body nepočítam.

$\Longrightarrow \frac{\partial v}{\partial y} = e^x(x\cos y - y\sin y + \cos y) \Longrightarrow v(x,y) = \int e^x (x\cos y - y\sin y + \cos y)\, dy + \Phi(x) \Longrightarrow$

$\Longrightarrow v(x,y) = xe^x \int \cos y dy - e^x \int y \sin y dy + e^x \int \cos y dy + \Phi(x)$

$\Longrightarrow v(x,y) = xe^x \sin y - e^x \left\{-y\cos y + \int \cos y dy\right\} + e^x \sin y + \Phi(x)$

$\Longrightarrow v(x,y) = e^x(x\sin y + y\cos y) + \Phi(x)$ $\boxed{\text{3 body}}$ $\Longrightarrow$

$\Longrightarrow \frac{\partial v}{\partial x} = e^x(x\sin y + y\cos y + \sin y) + \Phi'(x)$ $\boxed{\text{1 bod}}$ $\Longrightarrow$

$\Longrightarrow e^x(-x\sin y - \sin y - y\cos y) = -e^x(x\sin y + y\cos y + \sin y) - \Phi'(x) \Longrightarrow$

$\Longrightarrow \Phi(x) = C \Longrightarrow\ v(x,y) = e^x(x\sin y + y\cos y) + C$ $\boxed{\text{1 bod}}$ $\Longrightarrow$

$\Longrightarrow f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y) =$

$= e^x(x\cos y - y\sin y) + i\left(e^x(x\sin y + y\cos y) + C\right)$ $\boxed{\text{1 bod}}$

$f(1) = e \Longrightarrow f(1+i0) = e(\cos 0 - 0\sin 0) + i\left(e(\sin 0 + 0\cos 0) + C\right) \Longrightarrow$

$e = e + iC \Longrightarrow C = 0 \Longrightarrow$

$\Longrightarrow f(x+iy) = e^x(x\cos y - y\sin y) + ie^x(x\sin y + y\cos y) = ze^z.$ $\boxed{\text{1 bod}}$

2. (a) Vypočítajte $\int_C \frac{(x+y)}{x^2+y^2}dx - \frac{(x-y)}{x^2+y^2}dy$, kde C je časť kružnice $x^2+y^2 = a^2$ od bodu $(0,a)$ po bod $(a,0)$. (5 bodov)

Obrázok $\boxed{\text{1 bod}}$

$C^- : \boldsymbol{c} : \left\langle 0, \frac{\pi}{2}\right\rangle \longrightarrow \boldsymbol{R}^2$, $\boldsymbol{c}(t) = (a\cos t, a\sin t)$, $\boldsymbol{c}'(t) = (-a\sin t, a\cos t)$. $\boxed{\text{1 bod}}$

$-\int_{C^-} \frac{(x+y)dx-(x-y)dy}{x^2+y^2} = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{a(\cos t+\sin t)}{a^2\cos^2 t+a^2\sin^2 t}, -\frac{a(\cos t-\sin t)}{a^2\cos^2 t+a^2\sin^2 t}\right)(-a\sin t, a\cos t)\, dt$ $\boxed{\text{1 bod}}$ $=$

$= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(-\cos t\sin t - \sin^2 t - \cos^2 t + \sin t\cos t\right) dt = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(-\sin^2 t - \cos^2 t\right) dt =$

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 dt = \frac{\pi}{2}.$ $\boxed{\text{2 body}}$

(b) $f(z) = \frac{1}{z(1-z)}$ do Laurentovho radu na medzikruží $P(0,1,\infty) = \{z \in \mathbf{C} : 1 < |z| < \infty\}$.

Obrázok. Očakávame: $\frac{1}{z(1-z)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n.$ $\boxed{\text{1 bod}}$

$\frac{1}{z(1-z)} = \frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-z} = -\frac{1}{z^2}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{z}}$ $\boxed{\text{1 bod}}$ $= \left| \begin{array}{c} \left|\frac{1}{z}\right| < 1 \\ 1 < |z| \end{array} \right|$ $\boxed{\text{1 bod}}$ $=$

$\frac{1}{z^2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n-2}$ $\boxed{\text{2 body}}$

3. $\int_C \left(\frac{\cos z}{z^3} + z^2 \exp\left(\frac{z-1}{z}\right)\right) dz$, kde $C : |z| = \frac{1}{2}, \oplus$.

Obrázok $\boxed{\text{1 bod}}$

I.S.B.: $z = 0 \in IntC$ (pól 3. rádu) $\boxed{\text{1 bod}}$, $z = 0 \in IntC$ (p.s.b.). $\boxed{\text{1 bod}}$

$\int_C \left[\frac{\cos z}{z^3} + z^2 \exp\left(\frac{z-1}{z}\right)\right] dz = 2\pi i \left\{res_{z=0} \frac{\cos z}{z^3} + res_{z=0} z^2 \exp\left(\frac{z-1}{z}\right)\right\} \boxed{\text{1 bod}} =$

$= 2\pi i \left(-\frac{1}{2} - \frac{e}{6}\right) \boxed{\text{1 bod}}$

$res_{z=0} \frac{\cos z}{z^3} = \frac{1}{(3-1)!} \lim_{z\to 0} \frac{d^2}{dz^2}\left[z^3 \frac{\cos z}{z^3}\right] = \frac{1}{2} \lim_{z\to 0} (-\cos z) = -\frac{1}{2} \boxed{\text{2 body}}$

Očak.: $z^2 e^{\frac{z-1}{z}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$

$z^2 e^{\frac{z-1}{z}} = z^2 e e^{-\frac{1}{z}} = z^2 e \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{-n}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{e}{n!} z^{2-n} \Longrightarrow c_{-1} = (-1)^3 \frac{e}{3!} = -\frac{e}{6} \boxed{\text{3 body}}$

4. $x'' + x = f(t),\ x(0+) = 1,\ x'(0+) = 0$ ak $f(t) = \begin{cases} 0 & t \notin \langle 0,5\rangle \\ 2 & t \in \langle 0,5\rangle \end{cases}$.

$\mathcal{L}[x(t)] = X(p),\ \mathcal{L}[x''(t)] = p^2 X(\ p) - px(0+) - x'(0+) = p^2 X(p) - p, \boxed{\text{1 bod}}$

$f(t) = 2[\Theta(t) - \Theta(t-5)], \boxed{\text{1 bod}}$

$\mathcal{L}[f(t)] = \frac{2}{p} - e^{-5p}\frac{2}{P}, \boxed{\text{1 bod}}$, ak je chyba v tajto transformácii už ďalšie body nepočítam!

$\left(p^2+1\right) X(p) - p = \frac{2}{p} - e^{-5p}\frac{2}{p} \Longrightarrow X(p) = \frac{p}{p^2+1} + \frac{2}{p(p^2+1)} - e^{-5p}\frac{2}{p(p^2+1)}, \boxed{\text{1 bod}}$

$\frac{2}{p(p^2+1)} = \frac{A}{p} + \frac{Bp+C}{p^2+1} \Longrightarrow A\left(p^2+1\right) + p(Bp+C) = 2$

$\frac{2}{p(p^2+1)} = \frac{2}{p} - 2\frac{p}{p^2+1}$, za kompletný rozklad na parciálne zlomky $\boxed{\text{3 body}}$

$X(p) = \frac{p}{p^2+1} + \frac{2}{p} - 2\frac{p}{p^2+1} - e^{-5p}\left(\frac{2}{p} - 2\frac{p}{p^2+1}\right) =$

$= \frac{2}{p} - \frac{p}{p^2+1} - e^{-5p}\left(\frac{2}{p} - 2\frac{p}{p^2+1}\right) \boxed{\text{1 bod}} \Longrightarrow$

$\Longrightarrow x(t) = \eta(t)(2-\cos t) - \eta(t-5)(2 - 2\cos(t-5)). \boxed{\text{2 body}}$