DISKRÉTNA MATEMATIKA A LOGIKA – PRÍKLADY

Znakom $(*)$ sú označené príklady, ktoré sa môžu javiť ako „ťažšie" tesne po príslušnej prednáške. Mali by ste však byť schopní ich zvládnuť s istým časovým odstupom, po diskusii s kolegami alebo s prednášajúcim/cvičiacim a podobne.

5. Operácie na množine (časť II.)

(1) Nech A je množina. Je $(2^A, \div)$ grupa? (viď posledný príklad predošlej časti.)
(2) Je $(\mathbb{Z}, -)$ grupa? Prečo?
(3) Je $(\mathbb{Z}, +)$ grupa? Prečo?
(4) Je $(\mathbb{Z} \setminus \{0\}, .)$ grupa? Prečo?
(5) Je $(\mathbb{Q}, .)$ grupa? Prečo?
(6) Nech $*$ je operácia na $(0, \infty)$ daná predpisom $x * y = \sqrt{x.y}$. Je $((0, \infty), \star)$ grupa?
(7) Nech ∞ je nejaký objekt z vlastnosťou $\infty \notin \mathbb{Q}$. Definujme na $\mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ operáciu $*$ takto:

$$x * y = \begin{cases} \infty & \text{Ak } x = \infty \text{ alebo } y = \infty, \\ x.y & \text{inak.} \end{cases}$$

Je $(\mathbb{Q} \cup \{\infty\}, *)$ grupa?
(8) Je množina matíc

$$\{\begin{pmatrix} a & b.\sqrt{2} \\ b.\sqrt{2} & a \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R},\ a, b \text{ nie sú naraz obe nuly}\},$$

vybavená operáciou násobenia matíc grupou? Je operácia násobenia matíc na tejto množine komutatívna?
(9) Doplňte Cayleyho tabuľku tak, aby sa jednalo o komutatívnu (abelovskú) grupu.
(a)

.	a	b	c	d
a	a			
b	b	a		
c	c	d	a	
d				a

(b)

.	a	b	c	d
a	a			
b	b	c		
c	c	d	a	
d				

$(*)$ Dokážte, že neexistuje bijektívny homomorfizmus z jednej na druhú.
(10) Je množina $(0, 1\rangle$ podgrupou $((0, \infty\rangle, .)$?
(11) (a) Je množina $\{2^k : k \in \mathbb{N}\}$ podgrupou $((0, \infty\rangle, .)$?
(b) Je množina $\{2^k : k \in \mathbb{Z}\}$ podgrupou $((0, \infty\rangle, .)$?

   (c) Je množina $\{2^k.3^l : k, l \in \mathbb{Z}\}$ podgrupou $((0,\infty\rangle, .)$?

(12) V tomto cvičení uvažujeme vždy ako operáciu násobenie.
   (a) Definujme zobrazenie $\phi : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$ predpisom $\phi(x) = |x|$. Je ϕ homomorfizmus?
   (b) Definujme zobrazenie $\phi : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ predpisom $\phi(x) = x/|x|$. Je ϕ homomorfizmus? Čo je obor hodnôt ϕ?
   (c) Definujme zobrazenie $\phi : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$ predpisom $\phi(x) = x/|x|$. Je ϕ homomorfizmus? Čo je obor hodnôt ϕ?
   (d) Definujme zobrazenie $\phi : \mathbb{Q} \setminus \{0\} \to \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ predpisom $\phi(a) = 2a^2$. Je ϕ homomorfizmus? Aký je obor hodnôt ϕ?
   (e) Definujme zobrazenie $\phi : \mathbb{Q} \setminus \{0\} \to \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ predpisom $\phi(a) = \frac{1}{a^2}$. Je ϕ homomorfizmus? Aký je obor hodnôt ϕ?

(13) Nech S_n je grupa všetkých permutácií n-prvkovej množiny, vybavených operáciou skladania.
   (a) Nájdite „prirodzený” injektívny homomorfizmus $\phi : S_n \to S_{n+1}$.
   (b) Dokážte, že S_3 nie je komutatívna (abelovská).
   (c) Nájdite nejakú komutatívnu podgrupu S_3.

(14) ($*$) Uvažujme grupu $GL(2)$ všetkých reálnych regulárnych matíc 2×2, vybavenú operáciou násobenia matíc.
   (a) Definujme zobrazenie $\phi : GL(2) \to GL(2)$ $\phi(A) = \frac{1}{\det(A)}A$. Je ϕ homomorfizmus?
   (b) Definujme zobrazenie $\phi : GL(2) \to GL(2)$ $\phi(A) = A^T$, kde A^T je transpozícia matice A. Je ϕ homomorfizmus?
   (c) Tvoria symetrické singulárne matice podgrupu $GL(2)$?