DISKRÉTNA MATEMATIKA A LOGIKA – PRÍKLADY

3. Matematická indukcia

Dokážte matematickou indukciou (alebo vyvráťte) nasledujúce tvrdenia:

(1) Pre všetky $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ platí
  (a) $8|9^n - 1$,
  (b) $4|3^{2n-1} + 1$,
  (c) $21|5^{n+1} - 4^n$,
  (d) $133|11^{n+1} + 12^{2n-1}$.

(2) Pre všetky $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ platí

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{i}} \geq \sqrt{n}.$$

(3) Pre všetky $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ platí

$$\sum_{i=1}^{n} 2n - 1 = n^2.$$

(4) Pre všetky $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ platí

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} \leq 5.$$

(5) Pre všetky $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ platí

$$1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 \cdots + (-1)^{n-1} n^2 = (-1)^{n-1} \frac{n(n+1)}{2}.$$

(6) Súčet každých troch po sebe nasledujúcich prirodzených čísel je deliteľný číslom 6.

(7) Súčet tretích mocnín každých troch po sebe nasledujúcich prirodzených čísel je deliteľný číslom 9.

(8) Nech $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ je Fibonacciho postupnosť, daná rovnosťami

$$\begin{aligned} f_1 &= 1 \\ f_2 &= 1 \\ f_n &= f_{n-1} + f_{n-2}, \quad \text{pre } n \in \mathbb{N},\, n > 2 \end{aligned}$$

Dokážte alebo vyvráťte:
  (a) Pre všetky $n > 2$, $1 < \frac{f_{n+1}}{f_n} < 2$.
  (b) Pre všetky $n \geq 1$, f_{4n} je deliteľné 3.
  (c) Uhádnite, čomu je pre $n \geq 1$ rovné $(f_n)^2 + (f_{n+1})^2$. Dokážte vašu hypotézu.
  (d) $(*)$ Uhádnite, čomu je pre $n \geq 1$ rovné

$$f_1 + f_2 + \cdots + f_n.$$

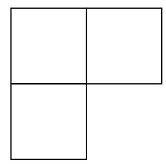
  Dokážte vašu hypotézu.

(e) (∗) Pre všetky $n \geq 1$ platí

$$f_n = \frac{\phi^n}{\sqrt{5}} - \frac{(1-\phi)^n}{\sqrt{5}},$$

kde $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. (Číslo ϕ je tzv. zlatý rez.)

(9) Každá štvorcová sieť $2^n \times 2^n$ ($n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$), z ktorej bol odobratý jeden (hociktorý!) jednotkový štvorček sa dá vykachličkovať „trinominami" v tvare



Každý štvorček na obrázku je jednotkový.

(10) Pre všetky $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$ neexistujú kladné prirodzené čísla s vlastnosťou $a^n + b^n = c^n$.

(11) Každé párne prirodzené číslo väčšie ako 2 sa dá napísať ako súčet dvoch prvočísiel.