

Metrické a normované priestory.

- Rozhodnite, ktoré z nasledujúcich funkcií $X \times X \rightarrow R$ sú metriky. Pre tie, ktoré nie sú, napíšte aspoň jednu z vlastností metriky, ktorú nespĺňajú
 - $X = R^2$, $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (x_1 - y_1) + (x_2 - y_2)$
 - $X = R^2$, $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$
 - $X = R^2$, $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2$
 - $X = C(\langle 0, 1 \rangle)$, $d(f, g) = \max_{x \in \langle 0, 1 \rangle} (f(x) - g(x))$
 - $X = C(\langle 0, 1 \rangle)$, $d(f, g) = \max_{x \in \langle 0, 1 \rangle} |f(x) - g(x)|$
 - $X = C(\langle 0, 1 \rangle)$, $d(f, g) = \max_{x \in \langle 0, 1 \rangle} (f(x) - g(x))$
 - $X = C(\langle 0, 1 \rangle)$, $d(f, g) = |f(1) - g(1)|$
- V lineárnom priestore R^2 označme $\|\mathbf{x}\|_1 = |x_1| + |x_2|$, $\|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2}$, $\|x\|_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|\}$.
 - Ukážte, že $\|\mathbf{x}\|_p$, $p = 1, 2, \infty$ sú normy.
 - Načrtnite okolie $O_{\varepsilon=1}(0, 0)$ v pri každej z uvedených metrík.
 - Dokážte, že platí $\|\mathbf{x}\|_\infty \leq \|\mathbf{x}\|_2 \leq \|\mathbf{x}\|_1$ pre $\forall \mathbf{x} \in R^2$.
 - *Ukážte, že $1 \leq p \leq q \implies (|x_1|^q + |x_2|^q)^{1/q} \leq (|x_1|^p + |x_2|^p)^{1/p}$.
- Nech $X = C\langle 0, 1 \rangle$ je priestor reálnych funkcií spojitých na intervale $\langle 0, 1 \rangle$ a $Y = C^1\langle 0, 1 \rangle$ je priestor reálnych funkcií raz spojitou diferencovateľných na intervale $\langle 0, 1 \rangle$ a na oboch priestoroch použijeme supremovú normu $\|x\| = \sup_{t \in \langle 0, 1 \rangle} |x(t)|$. Ukážte, že
 - Zobrazenie $F: X \rightarrow X$, $(Fx)(t) = \int_0^t x(\tau) d\tau$, je spojité.
 - Zobrazenie $F: Y \rightarrow X$, $(Fx)(t) = x'(t)$ nie je spojité.
- Nech $X = C\langle 0, 1 \rangle$ je priestor všetkých spojitých funkcií $f: \langle -1, 1 \rangle$ a nech $\|f\|_1 = \int_{-1}^1 |f(x)| dx$. Nech

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & x \in \langle -1, 0 \rangle, \\ nx, & x \in (0, \frac{1}{n}), \\ 1, & x \in \langle \frac{1}{n}, 1 \rangle. \end{cases}$$

- Načrtnite grafy funkcií f_1, f_2, f_n . Ukážte, že platí nerovnosť $\|f_n - f_m\|_1 \leq \frac{1}{2 \min\{n, m\}}$.
 - Ukážte, že postupnosť f_n v priestore X s normou $\|f\|_1$ nekonverguje.
- V priestore $X = C\langle 0, 1 \rangle$ z cvičenia 4 definujme ešte normu $\|f\|_\infty = \sup_{x \in \langle -1, 1 \rangle} |f(x)|$. Nech

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & |x| > \frac{1}{n}, \\ 1 + nx & -\frac{1}{n} \leq x \leq 0, \\ 1 - nx & 0 < x \leq \frac{1}{n}. \end{cases}$$
 Ukážte, že vzhľadom k norme $\|\cdot\|_1$ postupnosť funkcií f_n konverguje k nule, ale vzhľadom k norme $\|\cdot\|_\infty$ tá istá postupnosť nie je konvergentná.
 - Ukážte, že rovnica $x^3 + x - 1 = 0$ ($x \in R$) sa dá riešiť iteráciami $x_0 = 1$, $x_{n+1} = \frac{1}{1+x_n^2}$. Návod: Ukážte, že $g(x) = \frac{1}{1+x^2}$ zobrazuje $\langle \frac{1}{2}, 1 \rangle \rightarrow \langle \frac{1}{2}, 1 \rangle$ a je kontraktívne.
 - Nech $M = \langle 1, \infty \rangle$ a $d(x, y) = |x - y|$. Ukážte, že $Tx = \frac{x}{2} + \frac{1}{x}$ je kontraktívne v metrickom priestore (M, d) . Nájdite minimálnu konštantu $k \in (0, 1)$, pre ktorú $d(Tx, Ty) \leq k d(x, y)$, $\forall x, y \in M$ a určte aj pevný bod.
 - V priestore $R^{k \times 1}$ s metriku $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^k |x_i - y_i|$ je dané $T: R^{k \times 1} \rightarrow R^{k \times 1}$, $T\mathbf{x} = C\mathbf{x} + \mathbf{b}$, kde $C = (c_{ij}) \in R^{k \times k}$ je matica a $\mathbf{b} \in R^{k \times 1}$. Ukážte, že T je kontraktívne, ak $\sum_{i=1}^k |c_{ij}| < 1$ pre $\forall j = 1, 2, \dots, k$.
 - *Dokážte tvrdenie: Ak (X, d) je úplný metrický priestor, $T: X \rightarrow X$ je zobrazenie a existuje prirodzené číslo n , pre ktoré je T^n kontraktívne, má práve jeden pevný bod ($T^1 = T, T^{k+1}x = T(T^n x)$).

Hilbertove priestory.

- V priestore C^4 so skalárnym súčinom $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1 \bar{y}_1 + x_2 \bar{y}_2 + x_3 \bar{y}_3 + x_4 \bar{y}_4$
 - zistíte, či $(1 + i, 1, 2i, -1) \perp (1 + i, 1, -i, 1)$,
 - vypočítajte $\|(1 + i, 1, 2i, -1)\|$
 - aplikujte Gram-Schmidtov proces na $\mathbf{x}_0 = (1, i, -1, 1)$, $\mathbf{x}_1 = (1 + i, 1, 2i, -1)$.
- V priestore $C(\langle -1, 1 \rangle)$ so skalárnym súčinom $(f, g) = \int_{-1}^1 f(t) \overline{g(t)} dt$ aplikujte Gram-Schmidtov proces na $f_0(t) = 1, f_1(t) = t, f_2(t) = t^2$.
- V priestore $C(\langle 0, 1 \rangle)$ so skalárnym súčinom $(f, g) = \int_0^1 f(t) \overline{g(t)} dt$ aplikujte Gram-Schmidtov proces na $f_0(t) = 1, f_1(t) = t, f_2(t) = t^2$.
- Napište Haarov rozvoj funkcie $f: \langle 0, 1 \rangle \rightarrow R$ pre
 - $f(t) = 2t$
 - $f(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ 1 - t, & \frac{1}{2} < t \leq 1, \end{cases}$
 - $f(t) = t^2$
- Ukážte, že $\{e^{int}\}_{n=-\infty}^{\infty}$ tvoria ortogonálny systém v $L^2(\langle 0, 2\pi \rangle)$. Nájdite konštanty c_n , pre ktoré funkcie $c_n e^{int}$, $n \in Z$, tvoria ortonormálny systém.

Lineárne operátory v nekonečnorozmernom priestore.

15. Nech l_2 je priestor všetkých postupností komplexných čísel $x = (x_n)_{n=0}^\infty$, pre ktoré je rad $\sum_{n=0}^\infty |x_n|^2$ konvergentný (so skalárnym súčinom $(x, y) = \sum_{n=0}^\infty x_n \bar{y}_n$) a nech S je operátor jednostranného posunutia:

$$S(x_0, x_1, x_2, \dots) = (0, x_0, x_1, x_2, \dots)$$

- Vypočítajte normu operátora S ,
 - Ukážte, že S nemá žiadne vlastné číslo,
 - Ukážte, že $S^*(x_0, x_1, x_2, \dots) = (x_1, x_2, x_3, \dots)$,
 - Vypočítajte S^*S aj SS^* ,
 - Ukážte, že každé komplexné číslo λ , ktorého absolútna hodnota $|\lambda| < 1$, je vlastné číslo operátora S^*
16. Nech $X = C^1(\langle 0, 1 \rangle)$ s normou $\|f\| = \max_{t \in \langle 0, 1 \rangle} |f(t)|$.
- Ukážte, že operátor derivácie $D: f \mapsto f'$ nie je ohraničený,
 - Ukážte, že Volterrov operátor $(Vf)(x) = \int_0^x f(t) dt$ je ohraničený,
 - Vypočítajte normu Volterrovho operátora.
17. Nech $X = C(\langle 0, 1 \rangle)$ s normou $\|f\| = \max_{t \in \langle 0, 1 \rangle} |f(t)|$ a $K(x, t)$ je funkcia spojitá na štvorci $\langle 0, 1 \rangle \times \langle 0, 1 \rangle$. Určte normu operátora $T: X \rightarrow X$, $(Tf)(x) = \int_0^1 K(x, t)f(t) dt$, ak
- $K(x, t) = x + t$,
 - $f(x, t) = xt$,
18. V priestore $L^2(\langle 0, 2\pi \rangle)$ komplexných funkcií, pre ktoré $\int_0^{2\pi} |f(e^{it})|^2 dt < \infty$ s obvyklým skalárnym súčinom určte
- normu operátora $(Tf)(e^{it}) = e^{it}f(e^{it})$.
 - operátor T^* , normu $\|T^*\|$ a vypočítajte T^*T .
19. Ukážte, že operátor násobenia $(Tf)(x) = xf(x)$, $f \in D \subset L^2(R)$ nie je ohraničený. Pritom $D = \{f \in L^2(R) : \exists k > 0 \text{ také, že } |x| > k \implies f(x) = 0\}$.

Operátory v konečnorozmernom priestore.

20. Nájdite operátorovú normu matice A (t.j. $\|A\|_2$) a maticu P , pre ktorú $P^{-1} = P^*$ a pre ktorú je matica P^*AP diagonálna, ak

$$\begin{array}{lll} \text{a. } A = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix} & \text{b. } A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} & \text{c. } A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \\ \text{d. } A = \begin{pmatrix} 5 & 3\sqrt{3} \\ 3\sqrt{3} & -1 \end{pmatrix} & \text{e. } A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -36 \\ 0 & -3 & 0 \\ -36 & 0 & -23 \end{pmatrix} & \text{f. } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ \text{g. } A = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} & \text{h. } A = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \text{i. } A = \begin{pmatrix} \frac{10}{3} & -\frac{4}{3} & 0 & -\frac{4}{3} \\ -\frac{4}{3} & -\frac{5}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ -\frac{4}{3} & \frac{1}{3} & 0 & -\frac{5}{3} \end{pmatrix} \end{array}$$

21. Určte Jordanov tvar J a minimálny polynóm matice A . Nájdite regulárnu maticu P , pre ktorú $A = PJP^{-1}$. Vypočítajte spektrálny polomer matice A a normy $\|A\|_1, \|A\|_\infty$.

$$\begin{array}{ll} \text{a. } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, [J_3(2)] & \text{b. } A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ 3 & 2 & 3 \\ -2 & -2 & -3 \end{pmatrix}, [J_2(-1) \oplus J_1(-1)] \\ \text{c. } A = \begin{pmatrix} 6 & -7 & -4 \\ 1 & -2 & -1 \\ 6 & -6 & -4 \end{pmatrix}, [J_2(-1) \oplus J_1(2)] & \text{d. } A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}, [J_3(-1)] \\ \text{e. } A = \begin{pmatrix} 6 & -5 & -3 \\ 3 & -2 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}, [J_2(1) \oplus J_1(2)] & \text{f. } A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}, [J_2(0) \oplus J_1(1)] \\ \text{g. } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & -2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, [J_3(1) \oplus J_1(1)] & \text{h. } A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & -3 \\ 4 & -1 & 3 & -3 \end{pmatrix}, [J_2(0) \oplus J_2(0)] \\ \text{i. } A = \begin{pmatrix} 15 & 28 & -7 \\ -6 & -11 & 3 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}, [J_1(0) \oplus J_1(0) \oplus J_1(2)] & \text{j. } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & -2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, [J_3(1) \oplus J_1(1)] \\ \text{k. } A = \begin{pmatrix} 11 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 9 & 1 & 3 \\ -1 & -1 & 11 & 1 \\ -1 & 3 & -1 & 9 \end{pmatrix}, [J_2(8) \oplus J_1(12) \oplus J_1(12)] & \text{l. } A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}, [J_1(3) \oplus J_3(2)] \\ \text{m. } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}, [J_2(-1) \oplus J_1(-2)] & \text{n. } A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}, [J_2(-2) \oplus J_1(-2)] \end{array}$$

22. Vypočítajte $\exp(A)$ a $f(A)$ pre matice z príkladu 21, ak

a. $f(\lambda) = \lambda^4 - 8\lambda^3 + 23\lambda^2 - 26\lambda + 9$

$$\exp(A) = e^2 \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 3 & 3 \end{pmatrix}, f(A) = \begin{pmatrix} -2 & 5 & 3 \\ 2 & -1 & -2 \\ -5 & 7 & 6 \end{pmatrix}$$

b. $f(\lambda) = \lambda^4 + 2\lambda^3 - \lambda + 1$

$$\exp(A) = \frac{1}{e} \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & 3 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}, f(A) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & 3 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix},$$

c. $f(\lambda) = \lambda^5 + 4\lambda^4 + \lambda^3 - 13\lambda^2 - 20\lambda - 7$

$$\exp(A) = \begin{pmatrix} 2e^2 & e^{-1} - 2e^2 & -e^2 \\ e^{-1} & 0 & -e^{-1} \\ -2e^{-1} + 2e^2 & 2e^{-1} - 2e^2 & 2e^{-1} - e^2 \end{pmatrix}, f(A) = \begin{pmatrix} 6 & -4 & -1 \\ -2 & 4 & 2 \\ 6 & -6 & -1 \end{pmatrix},$$

d. $f(\lambda) = \lambda^5 - \lambda^4 - 5\lambda^3 + \lambda^2 + 8\lambda + 6$

$$\exp A = \frac{1}{e} \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 5 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, f(A) = 2I_3$$

e. $f(\lambda) = \lambda^5 - \lambda^4 - 5\lambda^3 + \lambda^2 + 8\lambda + 6$

$$\exp(A) = \begin{pmatrix} 4e^2 - 2e & -4e^2 + 3e & -2e^2 + e \\ 2e^2 - e & -2e^2 + 2e & -e^2 \\ -2e^2 - 2e & -2e^2 + 2e & -e^2 + 2e \end{pmatrix}, f(A) = \begin{pmatrix} -26 & 36 & 20 \\ -20 & 30 & 12 \\ -16 & 16 & 18 \end{pmatrix}$$