Metrické a normované priestory.

1. Rozhodnite, ktoré z nasledujúcich funckií $X \times X \to R$ sú metriky. Pre tie, ktoré nie sú, napíšte aspoň jednu z vlastností metriky, ktorú nespĺňajú
   a. $X = R^2$, $\mathrm{d}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (x_1 - y_1) + (x_2 - y_2)$
   b. $X = R^2$, $\mathrm{d}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$
   c. $X = R^2$, $\mathrm{d}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2$
   d. $X = C(\langle 0,1\rangle)$, $\mathrm{d}(f,g) = \max_{x\in\langle 0,1\rangle}(f(x) - g(x))$
   e. $X = C(\langle 0,1\rangle)$, $\mathrm{d}(f,g) = \max_{x\in\langle 0,1\rangle}|f(x) - g(x)|$
   f. $X = C(\langle 0,1\rangle)$, $\mathrm{d}(f,g) = \max_{x\in\langle 0,1\rangle}(f(x) - g(x))$
   g. $X = C(\langle 0,1\rangle)$, $\mathrm{d}(f,g) = |f(1) - g(1)|$
2. V lineárnom priestore R^2 označme $\|\mathbf{x}\|_1 = |x_1| + |x_2|$, $\|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2}$, $\|xx\|_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|$.
   a. Ukážte, že $\|\mathbf{x}\|_p$, $p = 1, 2, \infty$ s[normy.
   b. Načrtnite okolie $O_{\varepsilon=1}(0,0)$ v pri každej z uvedených metrík.
   c. Dokážte, že platí $\|\mathbf{x}\|_\infty \le \|\mathbf{x}\|_2 \le \|\mathbf{x}\|_1$ pre $\forall \mathbf{x} \in R^2$.
   *d. Ukážte, že $1 \le p \le q \implies (|x_1|^q + |x_2|^q)^{1/q} \le (|x_1|^p + |x_2|^p)^{1/p}$.
3. Nech $X = C\langle 0,1\rangle$ je priestor reálnych funkcií spojitých na intervale $\langle 0,1\rangle$ a $Y = C^1\langle 0,1\rangle$ je priestor reálnych funkcií raz spojito diferencovateľných na intervale $\langle 0,1\rangle$ a na oboch priestoroch použijeme suprémovú normu $\|x\| = \sup_{t\in\langle 0,1\rangle}|x(t)|$. Ukážte, že
   a. Zobrazenie $F\colon X \to X$, $(Fx)(t) = \int_0^t x(\tau)\,\mathrm{d}\,\tau$, je spojité.
   b. Zobrazenie $F\colon Y \to X$, $(Fx)(t) = x'(t)$ nie je spojité.
4. Nech $X = C\langle 0,1\rangle$ je priestor všetkých spojitých funkcií $f\colon \langle -1,1\rangle$ a nech $\|f\|_1 = \int\limits_{-1}^{1} |f(x)|\,\mathrm{d}\,x$. Nech

$$f_n(x) = \begin{cases} 0\,, & x \in \langle -1, 0\rangle\,, \\ nx\,, & x \in (0, \frac{1}{n})\,, \\ 1\,, & x \in \langle \frac{1}{n}, 1\rangle\,. \end{cases}$$

   a. Načrtnite grafy funkcií f_1, f_2, f_n. Ukážte, že platí nerovnosť $\|f_n - f_m\|_1 \le \frac{1}{2\min\{n,m\}}$.
   b. Ukážte, že postupnosť f_n v priestore X s normou $\|f\|_1$ nekonverguje.
5. V priestore $X = C\langle 0,1\rangle$ z cvičenia 4 definujme ešte normu $\|f\|_\infty = \sup_{x\in\langle -1,1\rangle}|f(x)|$. Nech
$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & |x| > \frac{1}{n}\,, \\ 1 + nx & -\frac{1}{n} \le x \le 0\,, \\ 1 - nx & 0 < x \le \frac{1}{n}\,. \end{cases}$$
   Ukážte, že vzhľadom k norme $\|\cdot\|_1$ postupnosť funkcií f_n konverguje k nule, ale vzhľadom k norme $\|\cdot\|_\infty$ tá istá postupnosť nie je konvergentná.
6. Ukážte, že rovnica $x^3 + x - 1 = 0$ $(x \in R)$ sa dá riešiť iteráciami $x_0 = 1$, $x_{n+1} = \frac{1}{1+x_n^2}$. Návod: Ukážte, že $g(x) = \frac{1}{1+x}$ zobrazuje $\langle \frac{1}{2}, 1\rangle \to \langle \frac{1}{2}, 1\rangle$ a je kontraktívne.
7. Nech $M = \langle 1, \infty)$ a $\mathrm{d}(x,y) = |x - y|$. Ukážte, že $Tx = \frac{x}{2} + \frac{1}{x}$ je kontraktívne v metrickom priestore (M, d). Nájdite minimálnu konštantu $k \in (0,1)$, pre ktorú $\mathrm{d}(Tx, Ty) \le k\,\mathrm{d}(x,y)$, $\forall x, y \in M$ a určte aj pevný bod.
8. V priestore $R^{k\times 1}$ s metrikou $\mathrm{d}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^k |x_i - y_i|$ je dané $T\colon R^{k\times 1} \to R^{k\times 1}$, $T\mathbf{x} = C\mathbf{x} + \mathbf{b}$, kde $C = (c_{ij} \in R^{k\times k}$ je matica a $\mathbf{b} \in R^{k\times 1}$. Ukážte, že T je kontraktívne, ak $\sum_{i=1}^k |c_{ij}| < 1$ pre $\forall\, j = 1, 2, \ldots, k$.

*9. Dokážte tvrdenie: Ak (X, d) je úplný metrický priestor, $T\colon X \to X$ je zobrazenie a existuje prirodzené číslo n, pre ktoré je T^n kontraktívne, má práve jeden pevný bod $(T^1 = T, T^{k+1}x = T(T^n x)$.

Hilbertove priestory.

10. V priestore C^4 so skalárnycm súčinom $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1\overline{y}_1 + x_2\overline{y}_2 + x_3\overline{y}_3 + x_4\overline{y}_4$
    a. zistite, či $(1+i, 1, 2i, -1) \perp (1+i, 1, -i, 1)$,
    b. vypočítajte $\|(1+i, 1, 2i, -1)\|$
    c. aplikujte Gram-Schmidtov proces na $\mathbf{x}_0 = (1, i, -1, 1)$, $\mathbf{x}_1 = (1+i, 1, 2i, -1)$.
11. V priestore $C(\langle -1, 1\rangle$ so skalárnycm súčinom $(f,g) = \int_{-1}^1 f(t)\overline{g(t)}\,\mathrm{d}\,t$ aplikujte Gram-Schmidtov proces na $f_0(t) = 1$, $f_1(t) = t$, $f_2(t) = t^2$.
12. V priestore $C(\langle 0, 1\rangle$ so skalárnycm súčinom $(f,g) = \int_0^1 f(t)\overline{g(t)}\,\mathrm{d}\,t$ aplikujte Gram-Schmidtov proces na $f_0(t) = 1$, $f_1(t) = t$, $f_2(t) = t^2$.
13. Napíšte Haarov rozvoj funkcie $f\colon \langle 0,1\rangle \to R$ pre
    a. $f(t) = 2t$
    b. $f(t) = \begin{cases} t\,, & 0 \le t \le \frac{1}{2}\,, \\ 1 - t\,, & \frac{1}{2} < t \le 1\,, \end{cases}$
    c. $f(t) = t^2$
14. Ukážte, že $\{e^{int}\}_{n=-\infty}^{n=\infty}$ tvoria ortogonálny systém v $L^2(\langle 0, 2\pi\rangle)$. Nájdite konštanty c_n, pre ktoré funkcie $c_n e^{int}$, $n \in Z$, tvoria ortonormálny systém.