Normálne matice, diagonalizovateľné matice a Jordanov kanonický tvar

V tejto časti budeme sa zaoberať iba operátormi z C^n do C^n, Stotožňujeme ich z maticami typu $n \times n$. Pritom, ak nie je uvedená báza, vzhľadom na ktorú je matica skonštruovaná, bude to matica operátora T vzhľadom na štandardnú bázu.

Pripomeňme, že štandardnou $\mathcal{E}$ sa nazýva báza pozostávajúca s prvkov

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= (1,0,0,\dots,0,0) \\ \mathbf{e}_2 &= (0,1,0,\dots,0,0) \\ &\vdots \\ \mathbf{e}_n &= (0,0,0,\dots,0,1) \end{aligned}$$

Ak $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots \mathbf{b}_n\}$ je báza C^n, tak každý prvok $\mathbf{x} \in C^n$ sa dá jednoznačne napísať v tvare $\mathbf{x} = x_1\mathbf{b}_1 + x_2\mathbf{b}_2 + \dots x_n\mathbf{b}_n$. n-ticu čísel $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ potom nazývame súradnice vektora $\mathbf{x}$ vzhľadom na bázu $\mathcal{B}$.

Pripomeňme ešte, že maticou operátora $T\colon C^n \to C^n$ vzhľadom k bázam $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots \mathbf{b}_n\}$ a $\mathcal{D}$ nazývame maticu $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{D}}(T)$, ktorej j-ty stĺpec tvoria súradnice vektora $\mathbf{b}_j$ vzhľadom na bázu $\mathcal{D}$.

Ak označíme stĺpec súradníc vektora $\mathbf{x}$ vzhľadom na bázu $\mathcal{K}$ $(\mathbf{x})_{\mathcal{K}}$, tak platí

$$(T\mathbf{x})_{\mathcal{D}} = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{D}}(T)(\mathbf{x})_{\mathcal{B}}\,.$$

Úlohou, ktorá sa nazýva spektrálny rozklad operátora T v C^n je nájsť bázu $\mathcal{B}$ pri ktorej je matica operátora T najjednoduchšia. Ak v štandardnej báze $\mathcal{E}$ má operátor maticu A a v nejakej inej báze $\mathcal{B}$ maticu J, tak platí

$$A = PJP^{-1}\,, \quad \text{kde} \quad P = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}}(I)\,, \quad (I\mathbf{x} = \mathbf{x})\,.$$

Matice A a J sa potom nazývajú podobné matice. V prípade, že matica $P^{-1} = P^*$, (čo je splnené, ak stĺpce matice P tvoria ortonormálnu bázu C^n) matice A a J sa nazývajú unitárne podobné. Tu A^* znamená maticu s prvkami $b_{ij} = \overline{a_{ji}}$, ak $A = (a_{ij})$.

Prvou vetou o kanonickom tvare matice je veta o unitárnej podobnosti normálnej matice, t.j. matice A, ktorá spĺňa $A^*A = AA^*$:

Veta. *Každá normálna matica A je unitárne podobná diagonálnej matici.*

Dôkaz. Najprv si pripomeňme, že ak λ je vlastné číslo normálneho operátora T, tak $\overline{\lambda}$ je vlastné číslo operátora T^* a navyše aj príslušné vlastné vektory sa rovnajú:

$$\begin{gathered} (T-\lambda I)\mathbf{x} = 0 \iff 0 = ((T-\lambda I)\mathbf{x}, (T-\lambda I)\mathbf{x}) = ((T-\lambda I)^*(T-\lambda I)\mathbf{x}, \mathbf{x}) = \\ ((T-\lambda I)(T-\lambda I)^*\mathbf{x}, \mathbf{x}) = ((T^* - \overline{\lambda})\mathbf{x}, (T^* - \overline{\lambda})\mathbf{x}) \iff T^*\mathbf{x} = \overline{\lambda}\mathbf{x}\,. \end{gathered}$$

Teda vlastné podpriestory operátora T sú aj vlastnými podpriestormi operátora T^*, špeciálne sú invariantné voči T aj T^*. Nech $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ sú všetky vlastné čísla matice A. Potom Príslušné vlastné podpriestory sú navzájom ortogonálne redukujúce podpriestory operátora T násobenia maticou A. Ak by bol priestor $L = \{\mathbf{x} \in C^n \colon \mathbf{x} \perp \mathbf{e}$ pre všetky vlastné vektory matice $A\}$ nenulový, bol by invariantný voči T aj T^* a zúženie operátora T na L by bol opäť normálny operátor na konečnorozmernom priestore, musel by teda mať ešte nejaké vlastné vektory. Tie by však boli aj vlastné vektory operátora T samotného, čo je spor.

Pre normálne operátory sú vlastné vektory príslušné rôznym vlastným číslam ortogonálne. Ak (Gramm-Schmidtovým procesom) nájdeme ortonormálne bázy všetkých vlastných podpriestorov operátora T, ich zjednotenie bude ortonormálna báza C^n.

Potom matica P, ktorej stĺpce sú súradnice takto získanej ortonormálnej bázy v štandardnej báze je potom unitárna a $A = PJP^*$, kde J je diagonálna matica, ktorá na diagonále obsahuje vlastné čísla matice A, každé toľkokrát, koľko je dimenzia príslušného vlastného podpriestoru.

Cvičenie. Nájdite operátorovú normu matice A a maticu P, pre ktorú $P^{-1} = P^*$ a pre ktorú je matica P^*AP diagonálna, ak

$$\text{a. } A = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{b. } A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \qquad \text{c. } A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{d. } A = \begin{pmatrix} 5 & 3\sqrt{3} \\ 3\sqrt{3} & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{e. } A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -36 \\ 0 & -3 & 0 \\ -36 & 0 & -23 \end{pmatrix} \qquad \text{f. } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{g. } A = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \qquad \text{h. } A = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{i. } A = \begin{pmatrix} \frac{10}{3} & \frac{-4}{3} & 0 & \frac{-4}{3} \\ \frac{-4}{3} & \frac{-5}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ \frac{-4}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{-5}{3} \end{pmatrix}$$

Riešenie. a. $A^* = A$, teda matica A je samoadjungovaná, preto je jej norma rovná najväčšiemu vlastnému číslu. Charakteristický polynóm matice A je $(1-\lambda)(-1-\lambda)-3 = \lambda^2-4$, jeho korene sú $\lambda_{1,2} = \pm 2$. Riešením sústav rovníc $(A-\lambda_1)\mathbf{f} = 0$ a $(A-\lambda_2)\mathbf{f} = 0$ dostávame $\mathbf{f}_1 = (\sqrt{3} \quad 1)^\top$, $\mathbf{f}_2 = (-1 \quad \sqrt{3})^\top$. Ľahko sa presvedčíme, že $(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2) = 0$. Preto tvoria vektory $\mathbf{e}_1 = \frac{1}{\|\mathbf{f}_1\|}\mathbf{f}_1$, $\mathbf{e}_2 = \frac{1}{\|\mathbf{f}_2\|}\mathbf{f}_2$ ortonormálnu bázu C^2 Dostaneme teda:

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

Norma matice A je $\|A\| = 2$

b. V tomto prípade je charakteristický polynóm $(\lambda-2)^2(\lambda-8)$. Pre $\lambda_1 = 2$ sa dajú nájsť dva lineárne nezávislé vlastné vektory: $\mathbf{f}_1 = (-1,1,0)^\top$, $\mathbf{f}_2 = (-1,0,1)^\top$ a pre $\lambda_2 = 8$ jeden (na oba predchádzajúce kolmý) $\mathbf{f}_3 = (1,1,1)^\top$. Na prvé dva použijeme ortonormalizačný proces a dostaneme ortonormálnu bázu C^3 pozostávajúcu z vlastných vektorov matice A:

$$\mathbf{e}_1 = \left(-\tfrac{1}{\sqrt{2}} \quad \tfrac{1}{\sqrt{2}} \quad 0\right)^\top \quad P_{\mathbf{e}_1}\mathbf{f}_2 = (\mathbf{f}_2, \mathbf{e}_1)\mathbf{e}_1 = \left(-\tfrac{1}{2} \quad \tfrac{1}{2} \quad 0\right)^\top,$$

$$\mathbf{f}_2 - P_{\mathbf{e}_1}\mathbf{f}_2 = \left(-\tfrac{1}{2} \quad -\tfrac{1}{2} \quad 1\right)^\top \quad \mathbf{e}_2 = \sqrt{\frac{2}{3}}\left(-\tfrac{1}{2} \quad -\tfrac{1}{2} \quad 1\right)^\top = \left(-\tfrac{1}{\sqrt{6}} \quad -\tfrac{1}{\sqrt{6}} \quad \tfrac{2}{\sqrt{6}}\right)^\top$$

$$\mathbf{e}_3 = \frac{1}{\|\mathbf{f}_3\|}\mathbf{f}_3 = \left(\tfrac{1}{\sqrt{3}} \quad \tfrac{1}{\sqrt{3}} \quad \tfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^\top$$

Stĺpce matice P tvoria vektory $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$. Zvyšné dva príklady sa riešia podobne.

V prípade, že matica A nie je normálna môže, ale nemusí byť podobná diagonálnej matici. Určite nie je unitárne podobná diagonálnej matici. Čo znamená, že báza vzhľadom ku ktorej má operátor násobenia maticou A diagonálnu maticu nemusí existovať a ak existuje nie je ortonormálna. Pred tým ako budeme definovať Jordanov kanonický tvar matice pripomenieme, že vlastné vektory patriace k rôznym vlastným číslam tvoria lineárne nezávislú množinu (nie vždy ortogonálnu) pre každý lineárny operátor.

Veta. *Nech T je lineárny operátor a nech $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$, ... , $\mathbf{f}_k$ sú vlastné vektory operátora T patriace k navzájom rôznym vlastným číslam λ_1, λ_2, ... ,λ_k. Potom je $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_k\}$ lineárne nezávislá množina.*

Dôkaz. Predpokladajme, že $\alpha_1\mathbf{f}_1 + \alpha_2\mathbf{f}_2 + \cdots + \alpha_k\mathbf{f}_k = 0$. Máme ukázať, že potom je $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_k = 0$. Tvrdenie platí ak $k = 1$, lebo vlastné vektory sú nenulové. Predpokladajme, teda, že platí pre nejaké prirodzené číslo k a ukážme, že platí aj pre $k+1$:

$\alpha_1\mathbf{f}_1 + \alpha_2\mathbf{f}_2 + \cdots + \alpha_k\mathbf{f}_k + \alpha_{k+1}\mathbf{f}_{k+1} = \mathbf{0}$. Ak by $\alpha_{k+1} = 0$, tak by $\alpha_1\mathbf{f}_1 + \alpha_2\mathbf{f}_2 + \cdots + \alpha_k\mathbf{f}_k = \mathbf{0}$ a podľa indukčného predpokladu by bolo $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_k = 0$. Ak $\alpha_{k+1} \neq 0$, tak pre $\beta_i = -\alpha_i/\alpha_{k+1}$, $i = 1, 2, \ldots, k$

$$\mathbf{f}_{k+1} = \beta_1\mathbf{f}_1 + \beta_2\mathbf{f}_2 + \cdots + \beta_k\mathbf{f}_k \implies T\mathbf{f}_{k+1} = \alpha_1 T\mathbf{f}_1 + \alpha_2 T\mathbf{f}_2 + \cdots + \alpha_k T\mathbf{f}_k$$

Pretože $T\mathbf{f}_i = \lambda_i \mathbf{f}_i$ dostaneme odtiaľ:

$$\lambda_{k+1} \underbrace{(\beta_1 \mathbf{f}_1 + \beta_2 \mathbf{f}_2 + \dots + \beta_k \mathbf{f}_k)}_{\mathbf{f}_{k+1}} = \beta_1 \lambda_1 \mathbf{f}_1 + \beta_2 \lambda_2 \mathbf{f}_2 + \dots + \beta_k \lambda_k \mathbf{f}_k$$

$$\Longrightarrow \beta_1(\lambda_{k+1} - \lambda_1)\mathbf{f}_1 + \beta_2(\lambda_{k+1} - \lambda_2)\mathbf{f}_2 + \dots + \beta_k(\lambda_{k+1} - \lambda_k)\mathbf{f}_k = 0\,.$$

Z predpokladu, že vlastné čísla sú navzájom rôzne a $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_k\}$ je lineárne nezávislá množina potom dostávame $\beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_k = 0$. Potom ale $\mathbf{f}_{k+1} = \mathbf{0}$, čo nie je pravda, lebo $\mathbf{f}_k$ je vlastný vektor. Takže $\alpha_{k+1} = 0$ a dôkaz vety je tým dokončený.

Veta. *Ak A je matica typu $n \times n$, tak je podobná diagonálnej matici vtedy a len vtedy, keď C^n má bázu pozostávajúcu z vlastných vektorov matice A. V takom prípade platí $A = PJP^{-1}$, kde stĺpce matice P sú vlastné vektory $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots \mathbf{f}_n$ matice A, ktoré tvoria bázu C^n a J je diagonálna matica, ktorej diagonálne prvky sú vlastné čísla patriace k vlastným vektorom $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots \mathbf{f}_n$ (v tom istom poradí).*

Poznamenajme tu len, že vlastné čísla na diagonále matice J nemusia byť navzájom rôzne.

Diagonálna matica, ktorá je unitárne podobná normálnej matici alebo podobná matici, ku ktorej existuje báza z vlastných vektorov je špeciálnym prípadom Jordanovho kanonického tvaru matice. Budeme sa teraz zaoberať prípadom, keď existuje len jedno vlastné číslo λ matice A typu $n \times n$, ktorého vlastný podpriestor má dimenziu menšiu ako n.

Všeobecne pre akúkoľvek maticu A typu $n \times n$ nemusí báza pozostávajúca z vlastných vektorov existovať. Opäť nerobíme rozdiely v označení medzi maticou A a operátorom násobenia touto maticou. Pre $\lambda \in \sigma(A)$

Označme $d_k(\lambda) = \dim \ker(A - \lambda I)^k$. Zrejme je postupnosť $d_k(\lambda)$ neklesajúca, $0 = d_0 < d_1$, na druhej strane $d_k(\lambda) \le n$ pre $\forall k$. Preto musí byť postupnosť $d_k(\lambda)$ od istého indexu konštantná. Navyše sa dá ľahko ukázať, že je to prvý index, pre ktorý platí $d_{k+1}(\lambda) = d_k(\lambda)$. Prvky priestoru $\ker(A - \lambda I)^k$, pre $k > 1$ sa nazývajú zovšeobecnené vlastné vektory matice A (ak $k = 1$ vlastné vektory matice A).

Budeme sa teraz zaoberať prípadom, keď existuje len jedno vlastné číslo λ matice A typu $n \times n$, ktorého vlastný podpriestor má dimenziu menšiu ako n. Ukážeme, že existuje báza pozostávajúca z vhodne usporiadaných vlastných a zovšeobecnených vlastných vektorov matice A. Maticu operátora T_A (násobenia maticou A) pri tejto báze potom nazývame Jordanov tvar matice A.

1. Prípad jediného vlastného vektora..

Definícia. Nech $k \in N$, $\lambda \in C$. Matica $k \times k$:

$$J_k(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

sa nazýva Jordanov blok rádu k patriaci k vlastnému číslu λ.

Najprv skúmajme vlastné čísla, vlastné vektory a zovšeobecnené vlastné vektory matice $J_3(\lambda_0)$. Jej charakteristický polynóm je $(\lambda_0 - \lambda)^3$. Jediným vlastným číslom je teda λ_0. Ľahko sa tiež zistí, že vlastný podpriestor patriaci k tomuto vlastnému číslu je jednorozmerný a vlastný vektor je $\mathbf{f}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Ak $\mathbf{f}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{f}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, tak

$$(J_3(\lambda_0) - \lambda_0 I)\mathbf{f}_3 = \mathbf{f}_2\,, \quad (J_3(\lambda_0) - \lambda_0 I)\mathbf{f}_2 = \mathbf{f}_1\,, \quad (J_3(\lambda_0) - \lambda_0 I)\mathbf{f}_1 = 0\,.$$

Naopak, ak A je matica typu 3×3 a λ je jej jediné vlastné číslo, pre ktoré je vlastný podpriestor jednorozmerný, tak existujú zovšeobecnené vlastné vektory $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$, pre ktoré $(A - \lambda I)\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2$, $(A - \lambda I)\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3$, $(A - \lambda I)\mathbf{e}_3 = 0$. Vektory $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ tvoria bázu priestoru C^3 pri ktorej je maticou zobrazenia A matica:

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Všeobecne každá matica s jediným vlastným číslom je podobná blokovo diagonálnej matici:

Veta. *Nech A je matica $n \times n$ s jediným vlastným číslom λ. Nech* $\dim \ker(A - \lambda I) = m$. *Potom je matica A podobná blokovo diagonálnej matici*

$$J = J_{k_1}(\lambda) \oplus J_{k_2}(\lambda) \oplus \cdots \oplus J_{k_m}(\lambda)\,, \quad k_1 \geq k_2 \geq \cdots \geq k_m\,,\ k_1 + k_2 + \cdots + k_m = n\,.$$

Táto matica sa nazýva Jordanova forma matice A.

Presnú definíciu pojmu blokovo diagonálna matica A neuvedieme. Je to matica, ktorá má nenulové prvky nanajvýš v istých podmaticiach, ktorých hlavná diagonála je časťou diagonály matice A. Napríklad $J_2(\lambda) \oplus J_2(\lambda) \oplus J_1(\lambda)$ je matica tvaru:

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 & 0 \end{matrix} & \boxed{\lambda} \end{pmatrix}$$

Teraz načrtneme dôkaz predchádzajúcej vety. Keďže λ je jediné vlastné číslo matice A, existuje $k_1 \in N$, pre ktoré $\ker(T - \lambda I)^{k_1} = C^n$, ale $\ker(T - \lambda I)^{k_1 - 1} \neq C^n$. Vyberme ľubovoľný vektor $\mathbf{f} \in C^n$, pre ktorý $(T - \lambda I)^{k_1 - 1}\mathbf{f} \neq \mathbf{0}$ a označme:

$$\mathbf{e}_1 = \mathbf{f},\ \mathbf{e}_2 = (T - \lambda I)\mathbf{f},\ \ldots,\ \mathbf{e}_{k_1} = (T - \lambda I)\mathbf{e}_{k_1 - 1} = (T - \lambda I)^{k_1 - 1}\mathbf{f}\,.$$

Ak by $\alpha_1 \mathbf{e}_1 + \alpha_2 \mathbf{e}_2 + \cdots + \alpha_{k_1}\mathbf{e}_{k_1} = \mathbf{0}$, tak $\mathbf{0} = (T - \lambda I)^{k_1 - 1}(\alpha_1 \mathbf{e}_1 + \alpha_2 \mathbf{e}_2 + \cdots + \alpha_{k_1}\mathbf{e}_{k_1}) = \alpha_1 \mathbf{e}_{k_1}$ a preto $\alpha_1 = 0$. Potom $\mathbf{0} = (T - \lambda I)^{k_1 - 2}(\alpha_2 \mathbf{e}_2 + \cdots + \alpha_{k_1}\mathbf{e}_{k_1}) = \alpha_2 \mathbf{e}_{k_1}$. Teda aj $\alpha_2 = 0$. Takto môžeme pokračovať a ukázať, že všetky α_i sú nulové, t.j. vektory $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots \mathbf{e}_{k_1}$ sú lineárne nezávislé.

Ak $k_1 = n$, tak vektory $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots \mathbf{e}_n$ tvoria bázu priestoru C^n a ľahko sa ukáže, že matica A vzhľadom na túto bázu je Jordanov blok $J_n(\lambda)$.

Ak $k_1 < n$, tak nájdeme najväčšie možné číslo k_2, pre ktoré existuje taký vektor $\mathbf{f} \in C^n$, $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_{k_1}, \mathbf{f}\}$ je lineárne nezávislá množina a $(A - \lambda I)^{k_2 - 1}\mathbf{f} \neq \mathbf{0}$, $(A - \lambda I)^{k_2}\mathbf{f} = \mathbf{0}$. Označíme potom

$$\mathbf{e}_{k_1 + 1} = \mathbf{f}\,,\ \mathbf{e}_{k_1 + 2} = (A - \lambda I)\mathbf{f}\,,\ \ldots,\ \mathbf{e}_{k_1 + k_2} = (A - \lambda I)^{k_2 - 1}\mathbf{f}\,.$$

zrejme vektory $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_{k_1 + k_2}$ tvoria lineárne nezávislú množinu. Ak $k_1 + k_2 = n$ je to báza C^n, ak nie pokračujeme rovnako až kým nedostaneme $k_1 + k_2 + \ldots k_m = n$, $k_1 \geq k_2 \geq \cdots \geq k_m \geq 1$ a bázu

$$\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_{k_1 - 1}, \mathbf{e}_{k_1} \ldots \mathbf{e}_{n-1}, \mathbf{e}_n\,.$$

Pričom táto báza spĺňa vzťahy

$$\begin{gathered} (T - \lambda I)\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2\,,\ (T - \lambda I)\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3\,, \ldots, (T - \lambda I)\mathbf{e}_{k_1 - 1} = \mathbf{e}_{k_1}\,,\ (T - \lambda I)\mathbf{e}_{k_1} = \mathbf{0} \\ (T - \lambda I)\mathbf{e}_{k_1 + 1} = \mathbf{e}_{k_1 + 2}\,, \ldots, (T - \lambda I)\mathbf{e}_{k_1 + k_2 - 1} = \mathbf{e}_{k_1 + k_2}\,,\ (T - \lambda I)\mathbf{e}_{k_1 + k_2} = \mathbf{0} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ (T - \lambda I)\mathbf{e}_{n - k_m + 1} = \mathbf{e}_{n - k_m + 2}\,, \ldots, (T - \lambda I)\mathbf{e}_{n-1} = \mathbf{e}_n\,,\ (T - \lambda I)\mathbf{e}_n = \mathbf{0}\,. \end{gathered}$$

Pri tejto báze je má operátor A maticu $J_{k_1}(\lambda) \oplus J_{k_2}(\lambda) \oplus J_{k_m}(\lambda)$.

V prípade viacerých vlastných čísel sa dá predchádzajúci postup zopakovať so všetkými vlastnými číslami a tým sa dokáže veta:

Veta o Jordanovom tvare. *Každá matica A typu $n \times n$ s komplexnými prvkami je podobná blokovo diagonálnej matici J, ktorej diagonálne bloky sú Jordanove bloky príslušné k vlastným číslam matice A. Matica J je určená jednoznačne až na poradie blokov.*

Poznámka. Z predchádzajúceho dôkazu vidieť, že Jordanov tvar matice má toľko blokov, koľko sa dá nájsť lineárne nezávislých vlastných vektorov. Pri hľadaní Jordanovho tvaru:

1. Nájdeme vlastné čísla matice A. Ak vlastné číslo λ je k-násobným koreňom charakteristického polynómu, $\det(A - \lambda I)$, tak bloky Jordanovho tvaru matice A s vlastným číslom λ tvoria maticu $k \times k$ a je ich toľko, koľko vieme nájsť lineárne nezávislých vlastných vektorov patriacich k vl. číslu λ.

2. Pre každé vlastné číslo zistíme, koľko vieme nájsť lineárne nezávislých vlastných vektorov a koľko potrebujeme zovšeobecnených vlastných vektorov.
   2a. Ak je len jeden blok, môžeme zvoliť vlastný vektor $\mathbf{f}$ konkrétne (bez parametrov) a k nemu počítať zovšeobecnené vlastné vektory ako riešenia sústavy $(A-\lambda I)\mathbf{x}=\mathbf{f}$.
   2b. Ak sa dá nájsť viacero lineárne nezávislých vlastných vektorov, ale menej ako k, tak musíme hľadať aj zovšeobecnené vlastné vektory, bázu vlastných vektorov však môžeme určiť až v priebehu počítania zovšeobecnených vlastných vektorov. Napr. Ak $k=3$, a existujú len dva lineárne nezávislé vlastné vektory $\mathbf{f}_1,\mathbf{f}_2$. Potom potrebný zovšeobecnený vlastný vektor hľadáme riešením sústavy $(A-\lambda I)\mathbf{x}=s\mathbf{f}_1+t\mathbf{f}_2$, a parametre s, t zvolíme tak, aby riešenie existovalo (nemusí existovať pre všetky hodnoty parametrov).

Definícia. Nech A je matica typu $n\times n$ potom mnohočlen $m_T(z)$ sa nazýva minimálny polynóm matice A, ak preň platí $m_T(T)=0$ a súčasne m_T je deliteľom každého mnohočlena p, pre ktorý $p(T)=0$.

Veta. *Nech A je matica typu $n\times n$. Ak $\sigma(A)=\{\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_p\}$, tak minimálny polynóm matice A je*

$$m_A(z)=(z-\lambda_1)^{k_1}(z-\lambda_2)^{k_2}\dots(z-\lambda_p)^{k_p}\,,$$

kde k_1 ($k_2,\dots k_p$) je rozmer najväčšieho Jordanovho bloku matice A prislúchajúceho vlastnému číslu λ_1 ($\lambda_2,\dots,\lambda_p$). Minimálny polynóm je vždy deliteľom charakteristického polynómu.

Postup hľadania Jordanovho tvaru a minimálneho polynómu matice A ukážeme na príkladoch:

Príklad 1. Nájdite Jordanov tvar a minim. polynóm matice $\begin{pmatrix}-2&0&1&0\\3&-1&1&-4\\-4&0&1&2\\-3&0&1&1\end{pmatrix}$.

Riešenie: Charakteristický polynóm matice A je

$$\begin{vmatrix}-2-\lambda&0&1&0\\3&-1-\lambda&1&-4\\-4&0&1-\lambda&2\\-3&0&1&1-\lambda\end{vmatrix}=\lambda(\lambda+1)^2(\lambda-1)$$

Príslušné vlastné vektory sú:

1) Pre $\lambda_1=0$ $\mathbf{e}_1=(1\ \ 1\ \ 2\ \ 1)^\top$,
2) Pre $\lambda_2=1$ $\mathbf{e}_2=(1\ \ -1\ \ 3\ \ 2)^\top$,
3) Pre $\lambda_3=-1$ $\mathbf{f}=(r\ \ s\ \ r\ \ r)^\top$. Zovšeobecnené vlastné vektory nemusíme hľadať, lebo pre λ_3 existujú dva lineárne nezávislé vlastné vektory
   $\mathbf{e}_3=(0\ \ 1\ \ 0\ \ 0)^\top$. $\mathbf{e}_4=(1\ \ 0\ \ 1\ \ 1)^\top$.
   Teda minimálny polynóm matice A je $(\lambda(\lambda-1)(\lambda+1)$ a Jordanov tvar:

$$J=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}\quad\text{pričom}\quad A=PJP^{-1}\quad\text{pre}\quad P=\begin{pmatrix}1&1&0&1\\1&-1&1&0\\2&3&0&1\\1&2&0&1\end{pmatrix}.$$

Príklad 2. Pre maticu A nájdite jej Jordanov tvar J, minimálny polynóm a maticu P, pre ktorú $A=PJP^{-1}$, $A=\begin{pmatrix}-4&1&-3&7\\-5&2&-2&6\\-7&1&-2&9\\-6&1&-3&9\end{pmatrix}$.

$$\begin{vmatrix}-4-\lambda&1&-3&7\\-5&2-\lambda&-2&6\\-7&1&-2-\lambda&9\\-6&1&-3&9-\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-4-\lambda&1&-3&7\\-5&2-\lambda&-2&6\\-3+\lambda&0&1-\lambda&2\\-2+\lambda&0&0&2-\lambda\end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix}3-\lambda&1&-3&7\\1&2-\lambda&-2&6\\-1+\lambda&0&1-\lambda&2\\0&0&0&2-\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-\lambda&1&-3&7\\-1&2-\lambda&-2&6\\0&0&1-\lambda&2\\0&0&0&2-\lambda\end{vmatrix}=$$

$$=(2-\lambda)(1-\lambda)[-\lambda(2-\lambda)+1]=(2-\lambda)(1-\lambda)(\lambda^2-2\lambda+1)=(\lambda-1)^3(\lambda-2)\,.$$

Pre $\lambda_1 = 2$ dostaneme vlastný vektor:

$$\begin{pmatrix} -6 & 1 & -3 & 7 \\ -5 & 0 & -2 & 6 \\ -7 & 1 & -4 & 9 \\ -6 & 1 & -3 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -6 & 1 & -3 & 7 \\ -5 & 0 & -2 & 6 \\ -1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow \mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Pre $\lambda_2 = 1$ dostaneme

$$\begin{pmatrix} -5 & 1 & -3 & 7 \\ -5 & 1 & -2 & 6 \\ -7 & 1 & -3 & 9 \\ -6 & 1 & -3 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -5 & 1 & -3 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -5 & 1 & -3 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \mathbf{f}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Vlastný podpriestor je jednorozmerný, hľadáme vlastné zovšeobecnené vektory:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -5 & 1 & -3 & 7 & 1 \\ -5 & 1 & -2 & 6 & 1 \\ -7 & 1 & -3 & 9 & 1 \\ -6 & 1 & -3 & 8 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} -5 & 1 & -3 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \mathbf{f}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

a ešte musíme hľadať jeden zovšeobecnený vlastný vektor (vieme, že blok je trojrozmerný):

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -5 & 1 & -3 & 7 & 0 \\ -5 & 1 & -2 & 6 & 1 \\ -7 & 1 & -3 & 9 & 0 \\ -6 & 1 & -3 & 8 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} -5 & 1 & -3 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \mathbf{f}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ak v priestore C^4 použijeme bázu $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4\}$, kde $\mathbf{e}_2 = \mathbf{f}_3$, $\mathbf{e}_3 = \mathbf{f}_2$, $\mathbf{e}_4 = \mathbf{f}_1$, tak operátor T, ktorého matica pri štandardnej báze je $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(T) = A$ má pri báze $\mathcal{B}$ maticu $J = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(T)$, ktorá je Jordanovým tvarom matice A.

$$A = P \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}, \quad \text{kde} \quad P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \\ -3 & 1 & -3 & 5 \\ 3 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Funkcie matíc

Pre funkciu f analytickú v istej oblasti sa dá definovať hodnota funkcie $f(A)$ pre maticu A, ak f je analytická na spektre matice A (t.j. v každom jej vlastnom čísle). Definovať sa dá pomerne jednoducho pomocou Taylorovho radu funkcie f, napríklad ak f je analytická v nule a $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$, tak sa môže stať, že pre maticu A rad $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n A^n$ konverguje (v priestore všetkých matíc s niektorou normou). Potom kladieme $f(A) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n A^n$. Tento rad však priamo obyčajne nemožno vypočítať. Preto sa na výpočet $f(A)$ používa Jordanova kanonická forma matice.

Najprv počítajme mocniny Jordanovho bloku zoberme najprv $J_4(0)$

$$J_4(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_4(0)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$J_4(0)^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_4(0)^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vidíme, že diagonála obsahujúca jednotky sa pri umocňovaní posúva a $J_k(0)^n = 0$ pre $\forall n \geq k$. Ak f je analytická v bode λ, dá sa v jeho okolí vyjadriť ako Taylorov rad, do ktorého sa dá ľahko dosadiť matica $J_k(\lambda) = J_k(0) + \lambda I$:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(\lambda)}{n!}(z-\lambda)^n \implies f(J_k(\lambda)) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(\lambda)}{n!} J_k^n(0) = \sum_{n=0}^{k-1} \frac{f^{(n)}(\lambda)}{n!} J_k^n(0)\,.$$

Napríklad pre $k = 4$

$$f(J_4(\lambda)) = \begin{pmatrix} f(\lambda) & 0 & 0 & 0 \\ f'(\lambda) & f(\lambda) & 0 & 0 \\ \frac{f^{(2)}(\lambda)}{2!} & f'(\lambda) & f(\lambda) & 0 \\ \frac{f^{(3)}(\lambda)}{3!} & \frac{f^{(2)}(\lambda)}{2!} & f'(\lambda) & f(\lambda) \end{pmatrix}. \tag{1}$$

To vedie k definícii $f(A)$, pre funkciu analytickú v každom bode spektra matice A:

Definícia. Nech A je matica, ktorej Jordanov tvar je $J = J(\lambda_1) \oplus J(\lambda_2) \oplus \cdots \oplus J(\lambda_m)$, kde $J(\lambda)$ je Jordanov blok patriaci k vlastnému číslu λ, f je funkcia analytická v každom bode spektra matice A a P je regulárna matica, pre ktorú $A = PJP^{-1}$. Potom

$$f(J) = f(J(\lambda_1)) \oplus f(J(\lambda_2)) \oplus \cdots \oplus f(J(\lambda_m)) \quad \text{a} \quad f(A) = Pf(J)P^{-1}\,.$$

Poznamenajme, že vlastné čísla λ_i v označení operátora J nemusia byť navzájom rozličné.

Cvičenie.

1. Pre maticu $A = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 4 \\ -6 & 2 & 5 \\ -5 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ vypočítajte $f(A)$ pre
   a) $f(z) = z^6 + z^2 + 1$, b) $f(z) = z^{30}$.
2. Pre maticu A nájdite Jordanov tvar, minimálny polynóm a matice $\exp(A)$, $g(A)$, kde $\exp(z) = e^z$, $g(z) = 3z^3 + z^2 - z + 1$.

a. $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ b. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -4 \end{pmatrix}$ c. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

d. $A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}$ e. $A = \begin{pmatrix} -4 & -2 & 4 \\ -3 & 1 & 2 \\ -10 & -4 & 9 \end{pmatrix}$ f. $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

g. $A = \begin{pmatrix} 15 & 28 & -7 \\ -6 & -11 & 3 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ h. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & -2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Výsledky (len Jordanov tvar J) a. $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, b. $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, c. $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$,
d. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, e. $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, f. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, g. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, h. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.