Teória lineárnych operátorov

Pripomeňme, že operátor z lineárneho priestoru X do lineárneho priestoru Y nad tým istým poľom (R alebo C) sa nazýva lineárny, ak pre $\forall x, y \in X$ a $\forall$ skalár α $T(x+y) = Tx + Ty$, $T(\alpha x) = \alpha Tx$.

Definícia. Nech X, Y sú lineárne normované priestory. Operátor $T\colon X \to Y$ sa nazýva ohraničený, $\exists K > 0$ také, že pre $\forall x \in X \quad \|Tx\| \le K \cdot \|x\|$.

V konečnorozmerných lineárnych normovaných priestoroch sú všetky lineárne operátory ohraničené. V nekonečnorozmerných priestoroch nie. Predtým, než si to ukážeme na príkladoch, definujme ešte normu ohraničeného lineárneho operátora. Pretože sa v ďalšom budeme zaoberať len lineárnymi operátormi, priestormi a podpriestormi budeme slovo lineárny vynechávať. Takže operátor znamená lineárny operátor, (pod)priestor lineárny (pod)priestor.

Definícia. Nech X, Y sú normované priestory a $T\colon X \to Y$ je ohraničený operátor. Číslo

$$\|T\| = \inf\{K > 0 \colon \forall x \in X \ \|Tx\| \le K \cdot \|x\|\}$$

sa nazýva norma operátora T.

Veta. *Ak X, Y sú normované priestory a $T\colon X \to Y$ je ohraničený operátor, tak*

$$\|T\| = \sup_{\|x\|\le 1} \|Tx\| = \sup_{\|x\|<1} \|Tx\| = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\| = \sup_{x\ne 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|}.$$

Dôkaz. Na dôkaz tejto vety si všimnime, že ak $x \in X$, $x \ne 0$ a $\|x\| \le 1$, tak

$$\|Tx\| = \left\| \|x\| \cdot T\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right\| = \|x\| \cdot \left\|T\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right\| \le \left\|T\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right\| \le \sup_{\|x\|=1} \|Tx\|.$$

Odtiaľ vidieť, že všetky štyri supréma vo vete majú tú istú hodnotu M ako aj to, že $\|T\| \le M$.

Na dôkaz nerovnosti $\|T\| \ge M$ si stačí uvedomiť, že pre $\forall M_1 < M$ $\exists x\colon \|x\| = 1$, pre ktoré $\|Tx\| > M_1$, a teda $\|T\| \ge M_1$.

Príklady ohraničených a neohraničených operátorov.

1) V priestore $X = R^n$ s normou $\|\{x_1, \dots x_n\}\| = \max\limits_{1\le i\le n} |x_i|$ je operátor násobenia ľubovoľnou maticou $A \in \mathcal{M}_{n,n}$ ohraničený operátor. Úlohu určiť jeho normu prenechávame čitateľovi.

2) Operátor z príkladu 1) je ohraničený aj pri ľubovoľnej norme na R^n a ohraničený je aj analogický operátor $C^n \to C^n$. Určiť však príslušnú normu je podstatne ťažšie.

3) Nech $X = C_{\langle a,b\rangle}$ je priestor všetkých spojitých funkcií na intervale $\langle a, b\rangle$ s normou $\|x\|_\infty = \max\limits_{t\in\langle a,b\rangle} |x(t)|$. Ak $K = K(t,\tau)$ je spojitá funkcia definovaná na $\langle a,b\rangle \times \langle a,b\rangle$, tak operátor $T\colon X \to X$, $(Tx)(t) = \int_a^b K(t,\tau)x(\tau)d\tau$ je ohraničený. Úlohu určiť jeho normu prenechávame opäť čitateľovi.

4) Nech teraz $X = C^1_{\langle a,b\rangle}$ je priestor všetkých funkcií s $C_{\langle a,b\rangle}$, ktoré majú spojitú prvú deriváciu so suprémovou normou. Potom operátor diferencovania $(Tx)(t) = x'(t)$ nie je ohraničený. Vidieť to z toho, že pre $x_n = \sin nt$ je $\|x_n\| = 1$, ale $\|Tx_n\| = n$ (lebo $(Tx_n)(t) = n\cos nt$).

5) Ak zmeníme normu v priestore $C^1_{\langle a,b\rangle}$ na $\|x\| = \|x\|_\infty + \|x'\|_\infty$, tak operátor diferencovania bude ohraničený operátor z $C^1_{\langle a,b\rangle}$ do $C_{\langle a,b\rangle}$

Vzťah medzi ohraničenosťou a spojitosťou operátora.

Veta. *Nech X, Y sú normované priestory a $T\colon X \to Y$ je lineárny operátor. Potom sú nasledujúce tvrdenia ekvivalentné:*

(i) *T je spojitý,*
(ii) *T je spojitý v 0,*
(iii) *T je ohraničený,*
(iv) *Jadro operátora T je uzavretý podpriestor X.*

Dôkaz. Ak by nebol operátor T ohraničený, tak $\exists$ $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset X$, pre ktoré $\|x_n\| = 1$ a $\lim \|Tx_n\| = \infty$. Potom pre $y_n = (1/\|Tx_n\|)x_n$ je $\lim y_n = 0$, ale $\lim Ty_n \ne 0$, teda T nie je spojitý v 0. To dokazuje implikáciu (ii) $\Longrightarrow$ (iii). Dôkaz ostatných implikácií je jednoduchý (a prenecháme ho čitateľovi).

Poznámka. Operátor X do R alebo C sa nazýva funkcionál. Lineárne aj nelineárne funkcionály majú významnú úlohu napr. vo variačnom počte, teórii distribúcií (zovšeobecnených funkcií) a v teórii slabých riešení diferenciálnych rovníc.

Príklad. Nech X je priestor všetkých komplexných (reálnych) postupností a $\varphi_k\colon X \to C$ $(X \to R)$ je evaluačný funkcionál: pre $x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ $\quad \varphi_k x = x_k$.

φ_k je ohraničený lineárny funkcionál na l^∞ aj l^p pre všetky $p \in \langle 1, \infty)$ a má vo všetkých uvedených prípadoch normu 1.

Podobne na priestore $C_{\langle a,b\rangle}$ je ohraničeným funkcionálom $\varphi_\lambda x = x(\lambda)$ pre každé $\lambda \in \langle a, b\rangle$ a má normu $\|\varphi_\lambda\| = 1$.

Reprezentácia lineárneho funkcionálu na Hilbertovom priestore.

Veta (Rieszova, o reprezentácii lin. funkcionálu)**.** *Nech H je komplexný Hilbertov priestor, $\varphi\colon H \to C$ je spojitý lineárny funkcionál. Potom existuje práve jeden prvok $f \in H$ taký, že $\varphi(g) = (g, f)$ pre $\forall\, g \in H$.*

Na dôkaz tejto vety treba niekoľko dôležitých pojmov a jednoduchých tvrdení.

Veta o ortogonálnej projekcii. *Nech H je Hilbertov priestor a $\emptyset \neq K \subset H$ je jeho uzavretá konvexná podmnožina (t.j. $k_n \in K$, $\lim k_n = k \implies k \in K$ a $k_1, k_2 \in K \implies \frac{1}{2}(k_1 + k_2) \in K$). Potom pre každé $h \in H$ existuje práve jeden prvok $h_0 \in K$, taký, že $\|h - h_0\| = \inf\{\|h - k\|\colon k \in K\}$*

Dôkaz. Pre každé n existuje $g_n \in K$, pre ktoré $\inf\{\|h - k\|\colon k \in K\} = \delta \leq \|h - g_n\| < \delta + \frac{1}{n}$. Teda $\lim \|h - g_n\| = \delta$. Postupnosť (g_n) je potom cauchyovská: Podľa rovnobežníkového pravidla platí

$$\begin{aligned}\|g_m - g_n\|^2 &= \|(g_m - h) + (h - g_n)\|^2 = 2(\|g_m - h\|^2 + \|h - g_n\|^2 - \|(g_m - h) - (h - g_n)\|^2 \\ &= 2\|g_m - h\|^2 + 2\|h - g_n\|^2 - 4\|\frac{1}{2}(g_m + g_n) - h\|^2 \leq 2\|g_m - h\|^2 + 2\|h - g_n\|^2 - 4\delta^2 \to 0\end{aligned}$$

Preto $\exists \lim\limits_{n\to\infty} g_n = h_0$. Tento prvok zrejme spĺňa vzťah $\|h - h_0\| = \delta$. Ak by existoval ešte jeden prvok k_0, spĺňajúci $\|h - k_0\| = \delta$, tak by sme dostali podobne

$$\|h_0 - k_0\|^2 = \|(h_0 - h) + (h - k_0)\|^2 = 2(\|h_0 - h\|^2 + \|h - k_0\|^2 - \|h_0 + k_0 - 2h\|^2 \leq 4\delta^2 - 4\|\frac{1}{2}(h_0 + k_0) - h\|^2 \leq 0$$

Teda $h_0 = k_0$.

Prvok h_0 sa nazýva ortogonálna projekcia vektora h na množinu K, v špeciálnom prípade, keď K je uzavretý lineárny podpriestor Hilbertovho priestoru H je zobrazenie, ktoré priradí vektoru $h \in H$ jeho ortogonálnu projekciu na K lineárnym ohraničeným zobrazením. Obvykle sa označuje P_K a nazýva ortogonálny projektor na podpriestor K. Ľahko sa ukáže, že pre všetky $h \in H$ je prvok $h - P_K h$ kolmý na každý prvok z K, teda $h = P_K h + (h - P_K h)$ určuje jednoznačný rozklad prvku h na súčet prvku $P_K h \in K$ a $(h - P_K h) \in K^\perp = \{f \in H\colon (f, k) = 0 \text{ pre } \forall\, k \in K\}$ Lineárny priestor $K^\perp$ nazývame ortogonálny doplnok množiny K.

Dôkaz Rieszovej vety. Jadro funkcionála φ označíme $K = \{x \in H\colon \varphi(x) = 0$. Pretože je φ spojitý funkcionál, K je uzavretý lineárny podpriestor H. Ak by $K = H$, tak $\varphi = 0$ a stačí zobrať $f = 0$. Predpokladajme teda, že $K \neq H$, potom $\exists\, x_1 \in K^\perp$, $\|x_1\| = 1$. Pre všetky $g \in H$ potom prvok $y = \varphi(g)x_1 - \varphi(x_1)g$ spĺňa

$$\begin{aligned}&\varphi(y) = \varphi(\varphi(g)x_1 - \varphi(x_1)g) = \varphi(g)\varphi(x_1) - \varphi(x_1)\varphi(g) = 0 \implies y \in K\,. \\ &\qquad \implies 0 = (y, x_1) = (\varphi(g)x_1 - \varphi(x_1)g, x_1) = \varphi(g) - \varphi(x_1)(g, x_1) \implies \varphi(g) = (g, \overline{\varphi(x_1)}x_1)\end{aligned}$$

Stačí teda položiť $f = \overline{\varphi(x_1)}x_1$.

Na dôkaz jednoznačnosti predpokladajme, že $\exists f, h \in H$, pre ktoré $\varphi(x) = (x, f) = (x, h)$ a teda $(x, f - h) = 0$ pre každé $x \in H$. Preto aj $(f - h, f - h) = \|f - h\|^2 = 0$, t.j. $f = h$.

Spektrum lineárnych operátorov.

Dá sa ukázať, že R^n aj C^n je pri každej norme úplným priestorom a všetky lineárne operátory z R^n (C^n) do R^m (C^m) sú spojité. Z lineárnej algebry vieme, že sa dajú určiť pomocou matice, ktorá závisí od báz v príslušný podpriestoroch.

Obmedzme sa teraz na prípad $m = n$ a za obe bázy zoberieme štandardnú bázu $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$, kde $\mathbf{e}_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, \dots, 0)$, $\dots$, $\mathbf{e}_n = (0, 0, \dots, 1)$. Ak použijeme euklidovskú normu a skalárny súčin, táto báza je ortonormálna a ľahko určíme maticu operátora $T\colon C^n \to C^n$ $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(T) = (a_{ij})$, kde $a_{ij} = (Te_j, e_i)$, lebo súradnice vektora Te_j pri štandardnej báze (j-ty stĺpec matice $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(T)$ určuje Fourierov rozvoj: $Te_j = \sum_{i=1}^n (Te_j, e_i)e_i$.

Takto dostaneme lineárne zobrazenie, ktoré operátoru priraďuje jednoznačne maticu a navyše skladaniu operátorov zodpovedá násobenie matíc. Operátory v konečnorozmerných priestoroch môžeme stotožniť s ich maticami vzhľadom na pevne zvolené bázy. Preto mnoho otázok o konečnorozmerných operátoroch vieme zodpovedať pomocou ich matíc.

Pripomeňme ako sa hľadajú vlastné čísla a vlastné vektory operátora $C^n \to C^n$. Identický operátor aj jednotkovú maticu budeme označovať I.

Definícia. Vektor $\mathbf{f} \in C^n$ sa nazýva vlastným vektorom matice $A \in \mathcal{M}_{n,n}$ patriacim k vlastnému číslu λ, ak $\mathbf{f} \neq \mathbf{0}$ a $A\mathbf{f} = \lambda\mathbf{f}$.

Analogicky sa definuje vlastné číslo a vlastný vektor pre operátor $T \colon X \to X$ (aj na nekonečnorozmernom priestore)

Definícia. Nech X je normovaný priestor a $T \colon X \to X$ je lineárny operátor. Vektor $\mathbf{f} \in X$ sa nazýva vlastným vektorom operátora T patriacim k vlastnému číslu λ, ak $\mathbf{f} \neq \mathbf{0}$ a $T\mathbf{f} = \lambda\mathbf{f}$.

λ je vlastné číslo matice A práve vtedy, keď $\det(A - \lambda I) = 0$. To je ekvivalentné s podmienkou, že matica $A - \lambda I$ nie je regulárna, t.j. neexistuje k nej inverzná matica. Zo základnej vety algebry vieme tiež, že každá matica (každý operátor v konečnorozmernom priestore) má vlastné číslo, môže však nemať reálne vlastné čísla. V nekonečnorozmernom prípade nemusí mať lineárny ohraničený operátor žiadne vlastné číslo a teda ani vlastný vektor. Namiesto vlastných čísel sa zavádza všeobecnejší pojem spektrum operátora. Budeme ho definovať len pre úplne normované (Banachove) priestory.

Definícia. Nech X je komplexný Banachov priestor a Nech $T \colon X \to X$ je ohraničený operátor. Potom množinu

$$\sigma(T) = \{\lambda \in C \colon \text{neexistuje ohraničený } (T - \lambda I)^{-1}\}$$

nazývame spektrum operátora T.

Analogicky definujeme spektrum operátora v reálnom Banachovom priestore:

$$\sigma(T) = \{\lambda \in R \colon \text{neexistuje ohraničený } (T - \lambda I)^{-1}\}$$

V prípade operátora v konečnorozmernom priestore splýva spektrum s množinou všetkých vlastných čísel a vieme, že v reálnom priestore môže byť prázdnou množinou (nájdite príklad). Pomocou teórie analytických funkcií sa dá ukázať, že v Komplexnom Banachovom priestore je spektrum ohraničeného operátora vždy neprázdna uzavretá ohraničená množina.

Známe je, že v konečnorozmernom prípade operátor T má diagonálnu maticu vzhľadom na bázu pozostávajúcu s vlastných vektorov matice A (nie pre všetky operátory taká báza existuje). Taká báza sa dá nájsť napr. pre všetky reálne symetrické matice. Spektrálna teória sa zaoberá vzťahom medzi spektrom a geometrickou štruktúrou operátorov.

Skôr, než uvedieme príklady spektier niektorých operátorov, zavedieme pojem adjungovaného operátora a spektrum rozdelíme na isté dôležité podmnožiny. Pre operátor T bude $N(T)$ znamenať jeho jadro, t.j. nulovú množinu: $\{\mathbf{x} \in X \colon T\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$, $R(T)$ bude značiť obor hodnôt T.

Veta. *Nech T je ohraničený operátor na komplexnom Banachovom priestore X. Ak označíme*
1) $\sigma_p(T) = \{\lambda \in C \colon N(T - \lambda I) \neq \{\mathbf{0}\}\}$ *(bodové spektrum),*
2) $\sigma_c(T) = \{\lambda \in C \colon N(T - \lambda I) = \{\mathbf{0}\}, R(T - \lambda I) \neq X,$ *ale každý prvok z X je limitou postupnosti prvkov z* $R(T - \lambda I)\}$ *(spojité spektrum),*
3) $\sigma_r(T) = \{\lambda \in C \colon N(T - \lambda I) = \{\mathbf{0}\}, R(T - \lambda I) \neq X,$ *a nie každý prvok z X je limitou postupnosti prvkov z* $R(T)\}$ *(reziduálne spektrum),*
4) $\rho(T) = \{\lambda \in C \colon N(T - \lambda I) = \{0\}, R(T - \lambda I) = X\}$ *(rezolventná množina)*
   Potom sú všetky štyri množiny navzájom disjunktné a
   $C = \sigma_p(T) \cup \sigma_c(T) \cup \sigma_r(T) \cup \rho(T)$.
   Ak $|\lambda| \geq \|T\|$, tak $\lambda \in \rho(T)$ a $\rho(T)$ je otvorená množina.

Dôkaz. To, že uvedené množiny sú disjunktné a platí $C = \sigma_p(T) \cup \sigma_c(T) \cup \sigma_r(T) \cup \rho(T)$, je priamym dôsledkom ich definície. Ukážeme, že $|\lambda| > \|T\| \implies (T - \lambda I)$ má ohraničený inverzný operátor.

Ak označíme pre operátory T_1, T_2 je ich súčin T_1T_2 operátor, ktorý vznikne skladaním zobrazení $(T_1T_2x = T_1(T_2x))$, tak sa ľahko ukáže, že $\|T_1T_2\| \leq \|T_1\|\|T_2\|$ a pre mocniny $\|T^n\| \leq \|T\|^n$. Okrem toho sa dá ľahko ukázať, že priestor $L(X)$ všetkých ohraničených operátorov na Banachovom priestore je pri tejto norme sám Banachovým priestorom. Predpokladajme, že $|\lambda| > \|T\|$. Potom rad

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda} \left(\frac{T}{\lambda}\right)^n \quad \text{je geometrický s kvocientom } \frac{T}{\lambda},\ \left\|\frac{T}{\lambda}\right\| < 1\,.$$

Pomocou úplnosti priestoru priestoru $L(X)$ sa ľahko ukáže, že tento rad konverguje a jeho limita je $(\lambda I - T)^{-1}$.

Definícia. Nech T je ohraničený operátor na Banachovom priestore X a $\sigma(T)$ je jeho spektrum, potom spektrálny polomer operátora T je číslo

$$r(T) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(T)\}\,.$$

Spektrálny polomer operátora sa dá vypočítať pomocou nasledujúceho vzorca:

Veta. *Nech T je ohraničený operátor na Banachovom priestore X. Potom existujú* $\lim_{n\to\infty} \|T^n\|^{(1/n)}$, $\inf_{n\in N} \|T^n\|^{(1/n)}$ *a platí*

$$r(T) = \inf_{n\in N} \|T^n\|^{(1/n)} = \lim_{n\to\infty} \|T^n\|^{(1/n)}\,.$$

Ak X je Hilbertov priestor, potom ku každému ohraničenému operátoru $T \in L(X)$ existuje práve jeden operátor $T^* \in L(X)$, pre ktorý je $(Tx, y) = (x, T^*y)$ pre všetky $x, y \in X$. Tento operátor sa nazýva adjungovaný k operátoru T, alebo Hermitovsky združený k operátoru T a v istom zmysle hrá úlohu prvku $L(X)$ "komplexne združeného" k T.

Ľahko sa ukáže, že platí tvrdenie:

Veta. *Ak T je ohraničený operátor na Hilbertovom priestore X. Ak T má inverzný operátor U ($TU = UT = I$), potom aj T^* je invertibilný a $(T^*)^{-1} = U^*$.*

Číslo λ patrí do spektra operátora T vtedy a len vtedy, keď $\overline{\lambda}$ patrí do spektra operátora T^*.

Dôkaz. Nech $x \in X$. Potom $(T^*U^*x, y) = (U^*x, Ty) = (x, UTy) = (x, y) \implies (T^*U^*x - x, y) = 0$ pre $\forall y \in X$. Pre $y = T^*U^*x - x$ dostaneme $(T^*U^*x - x, T^*U^*x - x) = 0$, teda $x = T^*U^*x$, podobne aj $U^*T^*x = x$, čiže $T^*U^* = U^*T^* = I$

Príklad. Nech operátor $T\colon l^2 \to l^2$ posúva postupnosť z l^2 o jedno miesto vpravo, t.j. $T(x_0, x_1, x_2, x_3 \dots) = (0, x_0, x_1, \dots)$. Určte jeho normu, určte T^* a $\sigma_p(T)$, $\sigma_p(T^*)$; $\sigma(T)$, $\sigma(T^*)$.

Veta. *Operácia * v priestore ohraničených operátorov na Hilbertovom priestore X má nasledujúce vlastnosti (pre $\forall$ operátory S, T, $\forall \alpha \in C$):*

(1) $I^* = I\,, \quad 0^* = 0\,,$

(2) $(S+T)^* = S^* + T^*,$

(3) $(\alpha T)^* = \overline{\alpha} T^*,$

(4) $(ST)^* = T^*S^*,$

(5) $(T^*)^* = T,$

(6) $\|T^*\| = \|T\|$

(7) $T^*T = (T^*T)^*$, $\|T^*T\| = \|T\|^2$.

Dôkaz. Veta je triviálnym dôsledkom definície. Trocha ťažšie sú len dôkazy posledných dvoch tvrdení.

Ukážeme $\|T^*\| = \|T\|$: Pre každé $x \in X$ $\|T^*x\|^2 = (T^*x, T^*x) = (TT^*x, x) \le \|TT^*x\|\|x\| \le \|T\|\|T^*x\|\|x\| \implies \|T^*x\| \le \|T\|\|x\|$. Teda T^* je ohraničený a jeho norma je $\|T^*\| \le \|T\|$. Opačnú nerovnosť dostaneme z rovnosti $(T^*)^* = T$.

Teraz máme $\|T^*T\| \le \|T^*\|\|T\| = \|T\|^2$ a súčasne $\|Tx\|^2 = (T^*Tx, x) \le \|T^*Tx\|\|x\| \le \|T^*T\|\|x\|^2$, odtiaľ dostávame $\|Tx\| \le \sqrt{\|T^*T\|}\|x\| \implies \|T\|^2 \le \|T^*T\|$.

Príklad. V priestore C^n s obvyklým skalárnym súčinom je daný lineárny operátor T. Ak A je jeho matica vzhľadom na štandardnú bázu, aká je matica operátora T^*?

Definícia. Nech X je Hilbertov priestor. Operátor $T \in L(X)$ sa nazýva normálny, ak $T^*T = TT^*$.

Vieme už, že spektrálny polomer operátora s normou 1 môže byť aj nula (napr. Volterrov integrálny operátor, matica $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$). Pre normálne operátory to nie je možné, lebo pre ne norma a spektrálny polomer sú tie isté čísla.

Veta. *Ak T je normálny operátor na X, potom platí:*

(1) $\forall x \in X$ $\|T^*x\| = \|Tx\|$, *špeciálne,* $Tx = 0 \iff T^*x = 0$.

(2) $\|T^*T\| = \|T^2\| = \|T\|^2$

(3) $r(T) = \|T\|$

Dôkaz. (1): $\|T^*x\|^2 = (T^*x, T^*x) = (TT^*x, x) = (T^*Tx, x) = (Tx, Tx) = \|Tx\|^2$.

(2) vyplýva z (1): pre $y = Tx$ dostaneme $\|T^*Tx\| = \|T^*y\| = \|Ty\| = \|T^2x\|$.

(3): Z (2) vyplýva pre každé prirodzené číslo k $\|T^{2^k}\| = \|T\|^{2^k}$. Teda

$$r(T) = \lim_{n\to\infty} \|T^n\|^{1/n} = \lim_{k\to\infty} \|T^{2^k}\|^{2^{-k}} = \lim \|T\| = \|T\|\,.$$

Predchádzajúca veta sa dá použiť na výpočet normy matice (vzhľadom na euklidovskú normu). Ak považujeme maticu A za maticu operátora pri štandardnej báze ľahko vypočítame maticu A^*A. Tá je normálna a preto je jej norma rovná spektrálnemu polomeru, v tomto prípade maximu vlastných čísel (všetky sú nezáporné). Pritom vieme, že $\|A\| = \sqrt{\|A^*A\|}$. V Nasledujúcom príklade sa použije táto veta na výpočet normy aj v nekonečnorozmernom prípade.

Príklad. Určte normu a spektrálny polomer operátora
$T\colon L^2_{\langle 0,1\rangle} \to L^2_{\langle 0,1\rangle}$, $(Tx)(t) = \int_0^t x(\tau)d\tau$

Vieme, že formálne ten istý operátor na priestore spojitých funkcií so suprémovou normou má normu 1 (dôkaz je jednoduchým cvičením). V priestore L^2 je $\|T\| = 2/\pi$. Ukazuje sa to pomocou výpočtu normy T^*T.

Ukážme najprv, že $(T^*y)(t) = \int_t^1 y(\tau)d\tau$:

$$(Tx,y) = \int_0^1 (Tx)(t)\overline{y(t)}dt = \int_0^1 \int_0^t x(\tau)d\tau\, \overline{y(t)}dt$$

Použijeme integrovanie per partes pre $u(t) = \int_0^t x(\tau)$, $v' = \overline{y(t)}$ a $u'(t) = x(t)$, $v(t) = -\int_t^1 \overline{y(\tau)}d\tau$ $(uv(0) = uv(1) = 0)$:

$$(x,T^*y) = (Tx,y) = \int_0^1 x(t) \int_t^1 \overline{y(\tau)}d\tau \implies T^*y = \int_t^1 y(\tau)d\tau\,.$$

A podobne per partes počítame aj $(T^*Tx)(t)$:

$$(T^*Tx)(t) = \int_t^1 \int_0^\tau x(s)ds\, d\tau =$$

$$\left| \, u'(\tau) = 1\,,\ u(\tau) = \tau\,, \quad v(\tau) = \int_0^\tau x(s)ds\,,\ v'(\tau) = x(\tau) \, \right|$$

$$= \left[\tau \int_0^\tau x(s)ds\right]_t^1 - \int_t^1 \tau x(\tau)d\tau = \int_0^1 x(s)ds - t\int_0^t x(s)ds - \int_t^1 \tau x(\tau)d\tau\,.$$

A riešime pre $\lambda > 0$ rovnicu $T^*Tx = \lambda x$, tak ,že predchádzajúci vzťah dva razy zderivujeme:

$$\begin{aligned}(T^*Tx)(t) = \lambda x(t) &= \int_0^1 x(s)ds - t\int_0^t x(s)ds - \int_t^1 \tau x(\tau)d\tau \\ \implies \lambda x'(t) &= -\int_0^t x(\tau)d\tau - tx(t) + tx(t)\,, \quad x(1) = 0 \\ \implies \lambda x''(t) &= -x(t) \quad x'(0) = 0\end{aligned}$$

Odtiaľ $x(t) = a\exp(it/\sqrt{\lambda}) + b\exp(-it/\sqrt{\lambda})$ a z podmienok $x(1) = x'(0) = 0$ dostaneme, vlastné čísla operátora T^*T: $\lambda_n = (\frac{1}{2}+n)^{-2}\pi^{-2}$, $n = 0,1,2\ldots$. Dá sa ukázať, že spektrum operátora T^*T obsahuje okrem týchto vlastných čísel iba číslo 0 (to, že obsahuje $0 = \lim \lambda_n$ vyplýva z uzavretosti spektra). Preto je normou tohoto operátora najväčšie z jeho vlastných čísel, t.j. $\|T^*T\| = 4/\pi^2$ a preto $T = 2/\pi$.

Invariantné podpriestory

Cieľom spektrálnej analýzy operátora $T \in L(X)$ je nájsť uzavreté lineárne podpriestory $L \subset X$, také, že $\forall x \in L\ Tx \in L$ a pritom zúženie operátora T na podpriestor L je čo najjednoduchší operátor.

Definícia. Nech X je Hilbertov priestor a nech T je ohraničený operátor na X. Uzavretý lineárny podpriestor L sa nazýva

a) invariantný voči T ak $TL \subset L$,

b) redukujúci pre T, ak $TL \subset L$ aj $TL^\perp \subset L^\perp$, kde $L^\perp = \{x \in X : (x,y) = 0 \text{ pre } \forall y \in L\}$ sa nazýva ortogonálny doplnok priestoru $L \subset X$ v priestore X.

c) hyperinvariantný pre T, ak je invariantný, pre každý operátor A, pre ktorý $AT = TA$.

Uzavreté podpriestory Hilbertovho priestoru sa dajú stotožniť s operátormi ortogonálnej projekcie na podpriestor:

Definícia. Nech X je Hilbertov priestor a nech L je jeho uzavretý podpriestor. Potom sa každý prvok $x \in X$ dá jednoznačne napísať v tvare $x_1 + x_2$, $x_1 \in L$, $x_2 \in L^{\perp}$, operátor P, pre ktorý je $Px = x_1$ je spojitý lineárny operátor a nazýva sa ortogonálny projektor na podpriestor L.

Fakt, že podpriestor je invariantný vzhľadom k operátoru T sa dá vyjadriť pomocou projektora na tento podpriestor:

Veta. *Nech T je ohraničený lineárny operátor na Hilbertovom priestore X, nech $L \subset X$ je uzavretý lineárny podpriestor X a P ortogonálny projektor na L. Potom*
(i) $P = P^*$ *(P je samoadjungovaný),*
(ii) *L je invariantný voči T vtedy a len vtedy, ak $PTP = TP$,*
(iii) *L je redukujúci pre T vtedy a len vtedy, ak $PT = TP \iff PT^* = T^*P$.*
(iv) *L je redukujúci pre T vtedy a len vtedy, ak je invariantný voči T aj voči T^*.*

Spektrálny rozklad operátora, znamená nájdenie dostatočne veľkého počtu invariantných a najlepšie redukujúcich a hyperinvariantných podpriestorov, na ktorých sa správa daný operátor, čo najjednoduchšie. Najprv uvedieme vetu o spektrálnom rozklade kompaktného normálneho operátora, ktorá má aplikácie najmä pri riešení integrálnych a diferenciálnych rovníc. Potom sa podrobnejšie budeme zaoberať spektrálnym rozkladom v konečnorozmernom prípade.

Definícia. Nech X je Hilbertov priestor. Operátor $T \in L(X)$ sa nazýva kompaktný, ak platí:
Pre každú ohraničenú postupnosť $\{x_n\} \subset X$ sa z postupnosti $\{Tx_n\}$ dá vybrať konvergentná podpostupnosť.

Ak λ je vlastné číslo operátora $T \in L(X)$, tak podpriestor $E(\lambda) = \{x \in X : Tx = \lambda x\}$ sa nazýva vlastný podpriestor patriaci k vlastnému číslu λ.

Veta. *Ak $\lambda \neq 0$ je vlastné číslo kompaktného operátora, tak*
$\dim E(\lambda) = \dim\{x \in X : Tx = \lambda x\} < \infty$.

Veta. *(Spektrálna veta pre kompaktný normálny operátor) Nech $T \in L(X)$ je kompaktný a normálny operátor na Hilbertovom priestore X. Potom platí:*
(i) *Ak $\lambda_i \neq \lambda_j$ sú vlastné čísla operátora T, tak $E(\lambda_i) \perp E(\lambda_j)$.*
(ii) *Existuje postupnosť $(\lambda_n)_{n=1}^{\mathcal{N}}$, $\mathcal{N} \in N$ alebo $\mathcal{N} = \infty$ vlastných čísel operátora T a postupnosť vlastných vektorov e_n, $\|e_n\| = 1$, pre ktorú platí*

$$Te_n = \lambda_n e_n\,,\ |\lambda_1| = \|T\|\,,\ |\lambda_{n+1}| \leq |\lambda_n| \forall n < \mathcal{N} \quad \lim_{n\to\infty} |\lambda_n| = 0 \ \text{ ak } \mathcal{N} = \infty\,.$$

A každý vektor $x \in X$ sa dá jednoznačne napísať v tvare

$$x = x_0 + \sum_{n=1}^{\mathcal{N}} (x, e_n) e_n\,, \qquad x_0 \perp E(\lambda_{n+1})\ \forall n \colon 0 \leq n < \mathcal{N}\,,\ Tx_0 = 0\,.$$

(iii) $\sigma(T) = \{\lambda_n : n \leq \mathcal{N}\}$*, ak* $\mathcal{N} < \infty$, $\sigma(T) = \{\lambda_n : n \leq \mathcal{N}\} \cup \{0\}$*, ak* $\mathcal{N} = \infty$.
(iv) *Všetky podpriestory $E(\lambda_n)$ sú redukujúce a hyperinvariantné pre T*

Poznamenajme, že väčšina ortogonálnych systémov používaných v aplikáciách (goniometrické funkcie, ortogonálne polynómy, špeciálne funkcie) je systém vlastných vektorov niektorého kompaktného samoadjungovaného operátora.

Dôkaz. (i): Pre každé $\lambda \in \sigma_p(T)$ je $\overline{\lambda} \in \sigma_p(T^*)$, lebo operátor $\lambda I - T$ je normálny, t.j. ak $(\lambda I - T)\mathbf{e} = \mathbf{0}$, tak aj $(\overline{\lambda} I - T^*)\mathbf{e} = \mathbf{0}$ ($\ker N = \ker N^*$ pre každý normálny operátor). Ak teraz $\lambda \neq \mu$ sú vlastné čísla normálneho operátora T s vlastnými vektormi $\mathbf{e}$, $\mathbf{f}$, tak

$$\lambda(\mathbf{e}, \mathbf{f}) = (T\mathbf{e}, \mathbf{f}) = (\mathbf{e}, T^*\mathbf{f}) = (\mathbf{e}, \overline{\mu} f) = \mu(\mathbf{e}, \mathbf{f}) \implies (\lambda - \mu)(\mathbf{e}, \mathbf{f}) = 0\,, (\mathbf{e}, \mathbf{f}) = 0\,.$$

Teda (i) platí pre každý normálny operátor.

Dôkaz tvrdenia (ii) je založený na tom, že každý normálny operátor T má spektrálny polomer $r = r(T) = \|T\|$ a tu ho iba naznačíme.

$$\|T\| = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\| \implies \exists \text{ postupnosť } (x_n) \subset X \colon \|x_n\| = 1\,,\ \lim \|Tx_n\| = \|T\|\,.$$

Ak je operátor navyše kompaktný, dá sa postupnosť (x_n) vybrať tak, aby bola postupnosť (Tx_n) konvergentná. Dá sa potom ukázať, že limita tejto postupnosti je vlastný vektor operátora T^*T s vlastným číslom $\|T\|^2$. Vlastný podpriestor operátora T^*T patriaci k vlastnému číslu $\|T\|^2$ je konečnorozmerný a redukujúci pre T. Preto v ňom existuje vlastný vektor aj pre operátor T. Ak je to $\mathbf{e}$, tak platí $T\mathbf{e} = \lambda\mathbf{e}$ pre nejaké $\lambda \in C$. Môžeme predpokladať, že $\|\mathbf{e}\| = 1$. Potom $|\lambda\|^2 = (T\mathbf{e}, T\mathbf{e}) = (T^*T\mathbf{e}, \mathbf{e}) = \|T\|^2(\mathbf{e}, \mathbf{e}) = \|T\|^2$.

Teda existuje vlastné číslo operátora T, ktorého absolútna hodnota je $\|T\|$, označme ho λ_1. Príslušný vlastný podpriestor $E(\lambda)$ je aj vlastným podpriestorom (pri vlastnom čísle $\overline{\lambda}$) operátora T^*. Preto je priestor X súčtom dvoch podpriestorov redukujúcich operátor T: $X = E(\lambda) + E(\lambda)^{\perp}$. $E(\lambda)$ je konečnorozmerný. Dôkaz tvrdenie (ii) sa dokončí zopakovaním rovnakých argumentov pre operátor T zúžený na $E(\lambda)^{\perp}$, ktorý je tiež kompaktný normálny.

Tvrdenia (iii) a (iv) sú ľahkým dôsledkom toho, že pre normálny operátor $Tx = \lambda x \implies T^*x = \overline{\lambda}x$ a faktu, že identický operátor ne nekonečnorozmernom priestore nie je kompaktný.