Hilbertove priestory

Veľké množstvo aplikácií majú lineárne normované priestory, v ktorých norma je odvodená od skalárneho (vnútorného) súčinu, podobne ako v bežnom trojrozmernom euklidovskom priestore. Budeme používať lineárny priestor, v ktorom skaláry sú komplexné čísla, väčšina definícií však platí aj pre reálne lineárne priestory.

Definícia. Nech H je komplexný lineárny priestor. Vnútorným súčinom (skalárnym súčinom) nazývame zobrazenie, ktoré každej dvojici vektorov $f, g \in H$ priradí skalár (f, g) tak, že pre ľubovoľné vektory $f, g, h \in H$ a pre ľubovoľný skalár α platí

(IP1) $(f+g, h) = (f, h) + (g, h)$ (aditívnosť),
(IP2) $(\alpha f, g) = \alpha(f, g)$ (homogenita),
(IP3) $(f, g) = \overline{(g, f)}$ (symetria),
(IP4) $(f, f) > 0$ pre $f \neq 0$ (kladná definitnosť).

Z podmienok (IP1)–(IP4) sa ľahko dokážu rovnosti:

(IP5) $(f, g+h) = (f, g) + (f, h)$,
(IP6) $(f, \alpha g) = \overline{\alpha}(f, g)$

Cvičenie. Dokážte (IP5) a (IP6) a rovnosť $\forall h \in H$ $(0, h) = (h, 0) = (0, 0) = 0$.

Formálne rovnako sa definuje aj vnútorný súčin v reálnom lineárnom priestore (môžeme vynechať znak pre komplexne združené číslo v (IP3). Príkladom reálneho skalárneho súčinu je obvyklý skalárny súčin v R^3:

$$\big((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)\big) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 \,,$$

v C^3 má predchádzajúci vnútorný súčin podobu

$$\big((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)\big) = x_1 \overline{y_1} + x_2 \overline{y_2} + x_3 \overline{y_3} \,.$$

Ukážeme teraz, že aj v R^3 obvyklá definícia normy

$$\|f\| = \sqrt{(f, f)}$$

sa dá zovšeobecniť na ľubovoľný priestor so skalárnym súčinom. Potrebujeme na to nasledovnú veľmi často používanú nerovnosť:

Veta (Schwarzova nerovnosť). *Nech (f, g) je vnútorný súčin na lineárnom priestore H. Potom pre $\forall f, g \in H$*

$$|(f, g)| \leq \|f\| \, \|g\|$$

a rovnosť $|(f, g)| = \|f\| \, \|g\|$ platí práve vtedy, keď sú vektory f, g lineárne závislé.

Dôkaz. Ak $f = 0$ alebo $g = 0$ tvrdenie je pravdivé, ak sú oba nenulové, tak pre každé číslo α

$$0 \leq (f - \alpha g, f - \alpha g) = (f, f) - \overline{\alpha}(f, g) - \alpha(g, f) + \alpha\overline{\alpha}(g, g)$$

Keď položíme $\alpha = (f, g)/(g, g)$ dostaneme odtiaľ

$$0 \leq (f, f) - \frac{(g, f)(f, g)}{(g, g)} - \frac{(f, g)(g, f)}{(g, g)} + \frac{(g, f)(f, g)}{(g, g)^2}(g, g) \implies \frac{(g, f)(g, f)}{(g, g)} \leq (f, f)$$
$$\implies |(f, g)|^2 \leq (f, f)(g, g) \implies |(f, g)| \leq \|f\| \, \|g\|, .$$

Pritom rovnosť $0 = (f - \alpha g, f - \alpha g)$ znamená $f - \alpha g = 0$, t.j. f, g sú lineárne závislé. Ak naopak $f = \alpha g$, tak

$$|(f, g)| = |(\alpha g, g)| = |\alpha|(g, g) = \alpha \|g\| \, \|g\| = \|f\| \, \|g\| \,.$$

Teraz sa dá ľahko ukázať, že $\|f\|$ je norma na H:

Podľa (IP4), ak $f \neq 0$, tak $\|f\| > 0$, ak $f = 0$, tak podľa (IP2) $(\alpha = 2, f = g = 0)$ $(0, 0) = (2 \cdot 0, 0) = 2 \cdot (0, 0)$ a teda $(0, 0) = 0$. Tým je dokázaná nezápornosť a kladná definitnosť normy.

Podľa (IP2) a (IP6) $\forall \alpha \in C$, $\forall f \in H$

$$\|\alpha f\|^2 = (\alpha f, \alpha f) = \alpha\overline{\alpha}(f, f) = |\alpha|^2 \|f\|^2 \,,$$

čo znamená, že norma je aj homogénna.

Na dôkaz trojuholníkovej nerovnosti vezmime $f, g \in H$ a počítajme

$$\|f + g\|^2 = (f + g, f + g) = (f, f) + (f, g) + (g, f) + (g, g) = (f, f) + 2\,\mathrm{Re}(f, g) + (g, g)$$
$$= |(f, f) + 2\,\mathrm{Re}(f, g) + (g, g)| \leq (f, f) + 2|(f, g)| + (g, g)$$

a podľa Schwarzovej nerovnosti dostaneme odtiaľ

$$\|f + g\|^2 \leq (\|f\|^2 + 2\|f\| \, \|g\| + \|g\|^2) = (\|f\| + \|g\|)^2 \implies \|f + g\| \leq \|f\| + \|g\| \,.$$

Definícia. Priestor s vnútorným súčinom, ktorý je pri norme $\|f\| = \sqrt{(f,f)}$ úplný normovaný priestor sa nazýva Hilbertov priestor.

Príklady priestorov s vnútorným súčinom.

1. V C^n (aj v R^n) vyberme pevne n-ticu kladných čísel $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$. Potom pre $\mathbf{e} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$, $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \dots, f_n)$
$$(\mathbf{e}, \mathbf{f}) = \sum_{k=1}^{n} v_k e_k \overline{f_k}$$
je vnútorný súčin.
2. V priestore l^2 všetkých postupností x_n komplexných čísel, pre ktoré je rad $\sum_n |x_n|^2$ konvergentný je vnútorným súčinom
$$(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n \overline{y}_n \, .$$
Dokážte, že predchádzajúci rad konverguje a že je ním definovaný vnútorný súčin.

l^2 je Hilbertov priestor, niektorí autori ho nazývajú klasický Hilbertov priestor. Neskôr ukážeme, že každý Hilbertov priestor sa dá v istom zmysle reprezentovať pomocou l^2.

3. Nech I je interval $L^2(I)$ je priestor všetkých funkcií $f\colon I \to C$, pre ktoré je funkcia $|f(t)|^2$ lebesgueovsky integrovateľná na I. Potom
$$(f, g) = \int_I f(t)\overline{g(t)}\mathrm{d}t$$
je vnútorný súčin na $L^2(I)$. Aj tento priestor je úplný, teda Hilbertov. Netriviálny dôkaz úplnosti vynecháme.
4. Nech H_0^2 je priestor všetkých komplexných funkcií spojitých v kruhu $\{z \in C\colon |z| \le 1\}$ a analytických v otvorenom kruhu $\{z \in C\colon |z| < 1\}$. Potom
$$(f, g) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{f(z)\overline{g(z)}}{z} \mathrm{d}z$$
je skalárny súčin. Priestor H_0^2 nie je však úplný. Jeho zúplnenie je priestor H^2 (Hardyho) tých funkcií analytických v kruhu $\{z\colon |z| < 1\}$, pre ktoré existuje pre takmer všetky $t \in (0, 2\pi)$ $f(e^{it}) = \lim_{r\to 1^-} f(re^{it})$ a táto funkcia patrí do $L^2\langle 0, 2\pi\rangle$. Pre aplikácie je navyše dôležité, že ak $f_n \to f$ v H_0^2 (teda podľa normy) tak postupnosť f_n konverguje k funkcii f dokonca rovnomerne na každom uzavretom kruhu $\{z\colon |z| \le r < 1\}$ (t.j. konverguje v každom bode tohoto kruhu a rýchlosť konvergencie postupnosti $f_n(z_0) \to f(z_0)$ nezávisí od bodu z_0. Dôkaz tohoto faktu je jednoduchá aplikácia Cauchyho integrálneho vzorca a Schwarzovej nerovnosti:
$$f(z_0) - f_n(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{f(z) - f_n(z)}{z - z_0}\mathrm{d}z \implies |f(z_0) - f_n(z_0)| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_{|z|=1} \frac{f(z) - f_n(z)}{z - z_0}\mathrm{d}z \right|$$
$$= \frac{1}{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} \left[f(e^{it}) - f_n(e^{it})\right] \frac{e^{it}}{e^{it} - z_0}\mathrm{d}t \right| \le \|f - f_n\|_2 \cdot \frac{1}{(1-r)^2}$$

Ak je norma odvodená od skalárneho súčinu, tak pre ňu platí rovnobežníkové pravidlo:
$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$$

Cvičenie. Dokážte rovnobežníkové pravidlo a interpretujte ho v R^2. Ukážte, že supremova norma v priestore $C\langle 0, 1\rangle$ nespĺňa rovnobežníkové pravidlo a teda nedá sa odvodiť zo žiadneho skalárneho súčinu.

Návod. Dosaďte do rovn. pravidla funkcie $x(t) = t^2$, $y(t) = 1$

Poznamenajme, že rovnobežníkove pravidlo v R^2 je jednoduchým dôsledkom kosínusovej vety.

Ortogonálne systémy

V priestoroch so skalárnym súčinom môžeme definovať aj uhol dvoch vektorov a osobitne je dôležité definovať pojem navzájom kolmých vektorov. Kvôli zjednodušeniu budeme pracovať v úplných priestoroch.

Definícia. Nech H je Hilbertov priestor vektory $f, g \in H$ sa nazývajú ortogonálne, ak $(f, g) = 0$.
Ak H je reálny Hilbertov priestor, tak uhlom vektorov $f, g \in H$ nazývame

$$\alpha = \arccos \frac{(f, g)}{\|f\| \, \|g\|} \,.$$

Poznamenajme, že zo Schwarzovej nerovnosti plynie v reálnom Hilbertovom priestore $-1 \leq \frac{(f,g)}{\|f\| \, \|g\|} \leq 1$, takže predchádzajúca definícia má zmysel. Platí tiež analógia Pytagorovej vety:

Veta. *Ak $f, g \in H$ sú na seba kolmé, tak*

$$\|f + g\|^2 = \|f\|^2 + \|g\|^2$$

Dôkaz. $\|f + g\|^2 = (f + g, f + g) = (f, f) + (f, g) + (g, f) + (g, g) = \|f\|^2 + 0 + 0 + \|g\|^2$.

Definícia. Konečnú alebo nekonečnú postupnosť $\{\mathbf{e}_n\}$ vektorov Hilbertovho priestoru H nazývame ortonormálny systém, ak platí

$$(\mathbf{e}_n, \mathbf{e}_m) = \delta_{nm} = \begin{cases} 1 & \text{ak } n = m \,, \\ 0 & \text{ak } n \neq m \,. \end{cases}$$

Ortonormálny systém sa nazýva úplný, ak platí nasledujúca implikácia

$$\forall n \; (\mathbf{f}, \mathbf{e}_n) = 0 \implies \mathbf{f} = 0$$

Nech je teraz $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots \mathbf{e}_n\}$ je konečný ortonormálny systém v Hilbertovom priestore H. Nech $\mathbf{f}$ je ľubovoľný prvok z H. Ktorý prvok z lineárneho obalu vektorov $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots \mathbf{e}_n\}$ je najbližšie k $\mathbf{f}$, presnejšie pre ktoré skaláry $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ je norma

$$\|\mathbf{f} - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \mathbf{e}_k\|$$

minimálna? Riešenie je analogické s úlohou nájsť v danej rovine bod, ktorý je najbližšie k danému bodu, t.j. ortogonálnu projekciu bodu na rovinu. Ukážeme, že minimum bude zaručené, ak

$$\forall m \quad (\mathbf{f} - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \mathbf{e}_k, \mathbf{e}_m) = 0 \,.$$

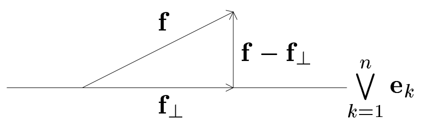
Ak platí predchádzajúca rovnosť, tak z ortonormálnosti $\{\mathbf{e}_k\}$ dostaneme

$$(\mathbf{f}, \mathbf{e}_m) - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k (\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_m) = (\mathbf{f}, \mathbf{e}_m) - \alpha_m = 0 \implies \alpha_m = (\mathbf{f}, \mathbf{e}_m) \quad (m = 1, 2, \ldots, n) \,.$$

Označme $\mathbf{f}_\perp = \sum_{k=1}^{n} (\mathbf{f}, \mathbf{e}_k) \mathbf{e}_k$ a $\mathbf{f}_1 = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \mathbf{e}_k$ pre ľubovoľné skaláry α_k. Potom platí

$$(\mathbf{f} - \mathbf{f}_\perp, \mathbf{f}_\perp - \mathbf{f}_1) = 0 \implies \|\mathbf{f} - \mathbf{f}_1\|^2 = \|(\mathbf{f} - \mathbf{f}_\perp) + (\mathbf{f}_\perp - \mathbf{f}_1)\|^2 = \|\mathbf{f} - \mathbf{f}_\perp\|^2 + \|\mathbf{f}_\perp - \mathbf{f}_1\|^2 \geq \|\mathbf{f} - \mathbf{f}_\perp\|^2 \,.$$

Teda minimum sa dosiahne pre $\mathbf{f}_1 = \mathbf{f}_\perp$. Vektor $\mathbf{f}_\perp$ sa nazýva tiež ortogonálna projekcia prvku $\mathbf{f}$ na lineárny obal prvkov $\{\mathbf{e}_k\}_{k=1}^{n}$.



Predchádzajúce výpočty sú základom metódy najmenších štvorcov. Podobné geometrické predstavy vedú aj ku známemu Gram-Schmidtovmu ortogonalizačnému procesu. Označme $\bigvee_{k=1}^{n} \mathbf{e}_k$ lineárny obal množiny $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\} \subset H$. Pripomeňme, že lineárny obal podmnožiny A lineárneho priestoru je množina všetkých lineárnych kombinácií prvkov množiny A.

Gram-Schmidtov ortogonalizačný proces. *Nech $\{\mathbf{a}_k\ k = 1, 2, \dots\}$ je lineárne nezávislá podmnožina prvkov Hilbertovho priestoru H. Potom existuje ortonormálny systém $\{\mathbf{e}_k : k = 1, 2, \dots\}$ taký, že $\bigvee_{k=1}^{n} \mathbf{e}_k = \bigvee_{k=1}^{n} \mathbf{a}_k$ pre $\forall n$.*

Dôkaz. Ortonormálny systém $\{\mathbf{e}_k\}$ sa konštruuje induktívne nasledovným postupom:
1. $\mathbf{e}_1 = (1/\|\mathbf{a}_1\|)\mathbf{a}_1$
2. Ak už máme skonštruované prvky $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots \mathbf{e}_n$, tak vypočítame najprv ortogonálnu projekciu $(\mathbf{a}_{n+1})_\perp$ prvku $\mathbf{a}_{n+1}$ na $\bigvee_{k=1}^{n} \mathbf{e}_k = \bigvee_{k=1}^{n} \mathbf{a}_k$ a položme

$$\mathbf{f}_{n+1} = \mathbf{a}_{n+1} - (\mathbf{a}_{n+1})_\perp = \mathbf{a}_{n+1} - \sum_{k=1}^{n} (\mathbf{a}_{n+1}, \mathbf{e}_k)\mathbf{e}_k\,, \qquad \mathbf{e}_{n+1} = \frac{1}{\|\mathbf{f}_{n+1}\|}\mathbf{f}_{n+1}\,.$$

   $\mathbf{f}_{n+1}$ je nenulový vektor, lebo množina $\{\mathbf{a}_k\ k = 1, 2, \dots\}$ je lineárne nezávislá.

Takto skonštruovaný systém $\{\mathbf{e}_k\}$ spĺňa všetky požadované podmienky.

Príklady ortonormálnych systémov.
1. V priestore $L^2[-1, 1]$ ($(f, g) = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)\mathrm{d}t$) aplikujme Gram-Schmidtov proces na postupnosť

$$1,\ t,\ t^2, \dots$$

   Tak získame postupnosť $\alpha_n \cdot L_n(t)$, kde α_n sú vhodné konštanty, ktoré zaručujú $\|\alpha_n \cdot L_n(t)\| = 1$ a a $L_n(t)$ sú Legendrove polynómy. Prvé členy postupnosti Legendrových polynómov sú

$$1\,,\ t\,,\ \frac{1}{2}(3t^2 - 1)\,,\ \frac{1}{2}(5t^2 - 3t)\,, \dots$$

   Dá sa ukázať, že sú dané vzorcom

$$L_n(t) = \frac{1}{2^n n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}(t^2 - 1)^n \qquad n = 0, 1, 2, \dots$$

   alebo rekurentne vzorcom

$$L_0(t) = 1\,,\ L_1(t) = t\,, \quad (n + 1)L_{n+1}(t) = (2n + 1)tL_n(t) - nL_{n-1}(t) \quad n = 1, 2, \dots$$

   Polynómy $L_n(t)$ sú riešeniami Legendrovej diferenciálnej rovnice

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big((1 - t^2)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\Big) + n(n + 1)u = 0\,, \quad t \in \langle -1, 1\rangle\,,\ n \geq 0$$

   ktorá sa vyskytuje v niektorých sféricky symetrických úlohách (napr. v kvantovej mechanike).
2. Ak sa Gram-Schmidtov proces aplikuje v l^2 na postupnosť vektorov

$$\mathbf{a}_k = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k, 0, 0, \dots)$$

   kde α_i, $i = 1, 2, \dots, k$ sú ľubovoľné nenulové čísla, dostaneme „štandardný" ortonormálny systém $\{\mathbf{e}_n\}$ v l^2:

$$\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0, \dots), \mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, \dots), \mathbf{e}_3 = (0, 0, 1, 0, \dots), \mathbf{e}_4 = (0, 0, 0, 1, 0 \dots), \dots$$

   Ukážte, že tento ortonormálny systém je úplný.
3. Ukážte, že na reálnom priestore $L^2[0, 2\pi]$ tvoria pri vhodných konštantách α_n ortonormálny systém funkcie

$$\alpha_0,\ \alpha_1 \cos t,\ \alpha_1 \sin t,\ \alpha_2 \cos 2t,\ \alpha_2 \sin 2t,\ \dots, \alpha_n \cos nt,\ \alpha_n \sin nt,\ \dots$$

   V komplexnom priestore $L^2[0, 2\pi]$ tvoria ortonormálny systém pre vhodné konštanty β_n funkcie

$$\{\beta_n e^{nt}\}_{n=-\infty}^{\infty}\,.$$

   Nájdite tieto konštanty.

Veta o Fourierových radoch. *Nech H je Hilbertov priestor a nech $\{\mathbf{e}_n\}$ je ortonormálna postupnosť. Potom sú nasledujúce tvrdenia ekvivalentné.*

a. $\{\mathbf{e}_n\}$ *je úplný ortonormálny systém.*

b. *Pre ľubovoľné* $\mathbf{f} \in H$ *platí (rozvoj do Fourierovho radu)*

$$\mathbf{f} = \sum_n (\mathbf{f}, \mathbf{e}_n)\mathbf{e}_n$$

c. *Pre ľubovoľné* $\mathbf{e}, \mathbf{f} \in H$

$$(\mathbf{e}, \mathbf{f}) = \sum_n (\mathbf{e}, \mathbf{e}_n)\overline{(\mathbf{f}, \mathbf{e}_n)}$$

d. *(Parsevalova rovnosť) Pre každé* $\mathbf{f} \in H$ *platí*

$$\|\mathbf{f}\|^2 = \sum_n |(\mathbf{f}, \mathbf{e}_n)|^2$$

Súčet sa počíta cez všetky indexy ortonormálneho systému (konečného alebo nekonečného). Nekonečný rad konverguje podľa normy v priestore H.

Úplný ortonormálny systém sa preto nazýva ortonormálna báza Hilbertovho priestoru. Koeficienty $(\mathbf{f}, \mathbf{e}_n)$ sa nazývajú Fourierove koeficienty prvku $\mathbf{f}$ vzhľadom k ortonormálnej báze $\{\mathbf{e}_n\}$.

Skôr než dokážeme predchádzajúcu vetu, potrebujeme dokázať niektoré pomocné tvrdenia.

Besselova nerovnosť. *Nech $\{\mathbf{e}_n\}$ je ortonormálna postupnosť prvkov Hilbertovho priestoru H. Potom pre každý prvok $\mathbf{f} \in H$ platí*

$$\sum_n |(\mathbf{f}, \mathbf{e}_n)|^2 \le \|\mathbf{f}\|^2$$

Dôkaz. Uvažujme najprv o konečnej podmnožine $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ potom platí

$$0 \le \left\| \mathbf{f} - \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{f}, \mathbf{e}_i)\mathbf{e}_i \right\|^2 = \left(\mathbf{f} - \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{f}, \mathbf{e}_i)\mathbf{e}_i, \mathbf{f} - \sum_{j=1}^{n} (\mathbf{f}, \mathbf{e}_j)\mathbf{e}_j \right) =$$

$$= (\mathbf{f}, \mathbf{f}) - \sum_{j=1}^{n} (\mathbf{f}, \mathbf{e}_i)(\mathbf{e}_i, \mathbf{f}) - \sum_{j=1}^{n} \overline{(\mathbf{f}, \mathbf{e}_j)}(\mathbf{f}, \mathbf{e}_j) + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (\mathbf{f}, \mathbf{e}_i)\overline{(\mathbf{f}, \mathbf{e}_j)}(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) =$$

$$= \|\mathbf{f}\|^2 - \sum_{i=1}^{n} |(\mathbf{f}, \mathbf{e}_i)|^2$$

Dôkaz vety o Fourierových radoch. Z Besselovej nerovnosti vyplýva, že rad

$$\sum_n (\mathbf{f}, \mathbf{e}_n)\mathbf{e}_n$$

konverguje (postupnosť jeho čiastočných súčtov je cauchyovská). Označme $\mathbf{g}$ jeho súčet.

$$(\mathbf{f} - \mathbf{g}, \mathbf{e}_i) = \left(\mathbf{f} - \sum_n (\mathbf{f}, \mathbf{e}_n)\mathbf{e}_n, \mathbf{e}_i \right) = (\mathbf{f}, \mathbf{e}_i) - (\mathbf{f}, \mathbf{e}_i) = 0$$

Z úplnosti systému $\{\mathbf{e}_n\}$ vyplýva teda tvrdenie b. b $\Longrightarrow$ c je zrejmým dôsledkom Schwarzovej nerovnosti. Tvrdenie d dostaneme z tvrdenia c ako špeciálny prípad pre $\mathbf{f} = \mathbf{e}$. Ostáva dokázať d $\Longrightarrow$ a. Ak by systém $\mathbf{e}_n$ nebol úplný, existoval by v H prvok $\mathbf{f} \neq 0$ taký, že $(\mathbf{f}, \mathbf{e}_n) = 0$ pre $\forall n$. Teda neplatila by rovnosť

$$\|\mathbf{f}\|^2 = \sum_n |(\mathbf{f}, \mathbf{e}_n)|^2 = 0\,.$$

Poznámka. 1) Predchádzajúca veta tvrdí, že Hilbertov priestor sa dá stotožniť s priestorom l^2, presnejšie popisuje vzájomne jednoznačné priradenie $H \to l^2$, ktoré zachováva algebraické operácie aj skalárny súčin. Dá sa ukázať, že všetky úplné ortonormálne systémy daného Hilbertovho priestoru majú rovnaký počet prvkov. Toto číslo sa potom nazýva (ortogonálna) dimenzia Hilbertovho priestoru H a úplný ortonormálny systém sa tiež nazýva ortonormálna báza. Podľa predchádzajúcej vety teda všetky Hilbertove priestory rovnakej dimenzie sú izomorfné.

2) Tvrdenie, že rad $\sum_{n=1}^{\infty} (\mathbf{f}, \mathbf{e}_n)\mathbf{e}_n$ je konvergentný (vzhľadom na normu v H) vtedy a len vtedy, keď konverguje číselný rad $\sum_{n=1}^{\infty} |(\mathbf{f}, \mathbf{e}_n)|^2$ sa nazýva *Rieszova-Fischerova veta.*

Príklad. Ortogonálne rozvoje sa používajú na riešenie veľmi rôznorodých úloh. Ukážeme to na príklade riešenia rovnice kmitania struny (a je daná konštanta):

$$\begin{aligned} a^2\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} \qquad x\in\langle 0,l)\ ,\ t\in\langle 0,\infty) \\ u(x,0) = f_1(x)\,, &\quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = f_2(x) \qquad \text{počiatočné podmienky} \\ u(0,t) = u(l,t) = 0 &\quad \text{okrajové podmienky} \end{aligned}$$

Riešenie hľadáme najprv v tvare súčinu funkcií závisiacich len od jednej premennej:

$$u(x,t) = \varphi(x)\psi(t)\,,\quad \text{s podmienkami } \varphi(0)=\varphi(l)=0\,.$$

O splnenie počiatočných podmienok sa zatiaľ nestaráme. Po derivovaní dostaneme dosadením do pôvodnej rovnice

$$a^2\varphi''(x)\psi(t) = \varphi(x)\psi'(t) \implies \frac{\varphi''(x)}{\varphi(x)} = \frac{\psi''(t)}{a^2\psi(t)} = -\lambda$$

V poslednej rovnici ľavá strana závisí len od x pravá len od t, preto je rovnosť možná len ak sa obe strany rovnajú tej istej konštante, označili sme ju $-\lambda$. Teda má platiť

$$\varphi''(x)+\lambda\varphi(x) = 0 \qquad \psi''(t)+\lambda a^2\psi(t) = 0$$

Najskôr hľadáme nenulové riešenia prvej rovnice, ktoré spĺňajú okrajové podmienky $\varphi(0)=\varphi(l)=0$. Ukáže sa, že existujú len pre niektoré čísla λ (nazývajú sa vlastné čísla a príslušné nenulové riešenia vlastné funkcie tejto rovnice). Je to lineárna diferenciálna rovnica s konštantnými koeficientami, ktorej charakteristická rovnica je $r^2+\lambda=0$. Je známe, že jej všeobecné riešenie je

$$\begin{aligned} \lambda<0 &\implies \varphi(x) = c_1 e^{x\sqrt{-\lambda}} + c_2 e^{-x\sqrt{-\lambda}} \\ \lambda=0 &\implies \varphi(x) = c_1 x + c_2 \\ \lambda>0 &\implies \varphi(x) = c_1\cos(x\sqrt{\lambda}) + c_2\sin(x\sqrt{\lambda}) \end{aligned}$$

Nenulové riešenie spĺňajúce okrajové podmienky existuje len v prípade $\lambda>0$, a to pre $\lambda_n = \dfrac{\pi^2 n^2}{l^2}$ funkcie $\varphi_n(x) = \sin(n\frac{\pi}{l}x)$ $(n=1,2,\dots)$. Jednoduchými výpočtami dostaneme

$$\int_0^l \varphi_n(x)\varphi_m(x) = \begin{cases} 0\,, & \text{ak } n\neq m, \\ \frac{l}{2}\,, & \text{ak } n=m. \end{cases}$$

Dá sa ukázať, že funkcie $\sqrt{\frac{2}{l}}\varphi_n(x)$, $n=1,2,\dots$, tvoria úplný ortonormálny systém v Hilbertovom priestore, ktorý vznikne zúplnením priestoru všetkých funkcií g spojitých na $\langle 0,l\rangle$, spĺňajúcich podmienku $g(0)=g(l)=0$ so skalárnym súčinom $(g,h)=\int_0^l g(x)h(x)\mathrm{d}x$.

Riešenie pôvodnej rovnice sa preto hľadá v tvare

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n(x)\psi_n(t)\,,$$

čo je pre každé pevné t Fourierov rad funkcie $u(x,t)$ vzhľadom k ortogonálnemu systému $\varphi_n(x)$. Funkcie $\psi_n(t)$ sa hľadajú tak, aby funkcia $u(x,t)$ spĺňala danú rovnicu a počiatočnú podmienku, t.j. aby platilo

$$(*) \qquad \psi_n''(t) + \lambda_n a^2\psi(t) = 0\,,$$

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n(x)\psi_n(0) = f_1(x)\,,\quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n(x)\psi_n'(0) = f_2(x)\,.$$

Posledné dva nekonečné rady sú Fourierove rady funkcií f_1, f_2 vzhľadom na ortogonálny systém $\varphi_n(x)$ a určujú počiatočné podmienky diferenciálnej rovnice $(*)$.

Cvičenia. 1. Riešte predchádzajúcu rovnicu pre $l=\pi$, $a=1$, $f_2(x)=0$,
$f_1(x)=\begin{cases} x & x\in\langle 0,\frac{\pi}{2}\rangle \\ \pi-x & x\in\langle\frac{\pi}{2},\pi\rangle\end{cases}$. $\left(u(x,t)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{4(-1)^k}{(2k+1)^2}\sin(2k+1)x\cos(2k+1)t\,.\right)$

2. Ukážte, že v Hilbertovom priestore

$$\forall\lambda\colon 0\le\lambda\le 1\ \|\lambda x+(1-\lambda)y\|=\|x\|\implies x=y$$

Návod. Môžeme predpokladať, že $\|x\|=1$. Pre $z=\lambda x+(1-\lambda)y$ využite, že

$$1=(z,z)=(z,\lambda x+(1-\lambda)y)=\lambda(z,x)+(1-\lambda)(z,y)\le\lambda|(z,x)|+(1-\lambda)|(z,y)|$$

3. Nájdite prvé tri funkcie z ortonormálneho systému, ktorý vznikne Gram-Schmidtovým procesom z funkcií $f_n(t)=t^n$, $n=0,1,\dots$ v priestore $L^2(I)$, kde I je
a. $I=\langle 0,1\rangle$ b. $I=\langle -1,1\rangle$ c. $I=\langle 1,2\rangle$

4. Nech $\mathbf{f}_1,\mathbf{f}_2,\dots\mathbf{f}_n$ sú vektory z Hilbertovho priestoru. Ukážte, že sú lineárne nezávislé vtedy a len vtedy keď je nenulový determinant

$$G(\mathbf{f}_1,\mathbf{f}_2,\dots\mathbf{f}_n)=\begin{vmatrix}(\mathbf{f}_1,\mathbf{f}_1) & (\mathbf{f}_1,\mathbf{f}_2) & \dots & (\mathbf{f}_1,\mathbf{f}_n)\\ (\mathbf{f}_2,\mathbf{f}_1) & (\mathbf{f}_2,\mathbf{f}_2) & \dots & (\mathbf{f}_2,\mathbf{f}_n)\\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots\\ (\mathbf{f}_n,\mathbf{f}_1) & (\mathbf{f}_n,\mathbf{f}_2) & \dots & (\mathbf{f}_n,\mathbf{f}_n)\end{vmatrix}$$

5. Nech je v C^3 skalárny súčin daný vzťahom $(\mathbf{e},\mathbf{f})=e_1\overline{f_1}+2e_2\overline{f_2}+3e_3\overline{f_3}$. Nájdite ortonormálnu bázu, ktorá vznikne Gram-Schmidtovým procesom z trojice vektorov

$$\mathbf{f}_1=(0,i,i)\quad \mathbf{f}_2=(i,0,i),\quad \mathbf{f}_3=(i,i,0)\,.$$

[Výsledok: $\mathbf{e}_1=(\frac{i}{\sqrt{5}}(0,1,1)$, $\mathbf{e}_2=\frac{i}{5}\sqrt{\frac{5}{11}}(5,-3,2)$, $\mathbf{e}_3=\frac{i}{33}\sqrt{\frac{11}{2}}(10,5,-4)$.]

6. Nech $\{\mathbf{e},\mathbf{f}\}$ je lineárne nezávislá podmnožina prvkov Hilbertovho priestoru H. Definujme funkciu $\varphi\colon C\to R$, $\varphi(\alpha)=\|\mathbf{e}-\alpha\mathbf{f}\|$
a. Nakreslite geometrickú interpretáciu funkcie $\varphi(\alpha)$
b. Pre ktoré α nadobúda funkcia $\varphi(\alpha)$ minimum?
c. Nech $\mathbf{e},\mathbf{f}$ sú prvky priestoru $L^2\langle 0,\infty)$, pre ktoré $\mathbf{e}(t)=\frac{1}{t}$, $\mathbf{f}(t)=\frac{1}{t^2}$. Určte v tomto prípade minimum funkcie $\varphi(\alpha)$.

Záverom tejto časti ešte uvedieme niektoré z ortogonálnych systémov známych z rôznych aplikácií.

Haarov systém.
Na intervale $\langle 0,1\rangle$ definujeme najprv ortogonálny systém funkcií:

$$h_{00}(x)=1\qquad\forall x$$

$$h_{01}(x)=\begin{cases}1 & 0\le x\le\frac12\\ -1 & \frac12<x\le 1\end{cases}$$

$$h_{11}(x)=\begin{cases}1 & 0\le x\le\frac14\\ -1 & \frac14<x\le\frac12\\ 0 & \text{pre ostatné } x\end{cases}\qquad h_{12}(x)=\begin{cases}1 & \frac12<x\le\frac34\\ -1 & \frac34<x\le 1\\ 0 & \text{pre ostatné } x\end{cases}$$

$$h_{nj}(x)=\begin{cases}1 & \frac{j-1}{2^n}<x\le\frac{2j-1}{2^{n+1}}\\ -1 & \frac{2j-1}{2^{n+1}}x\le\frac{j}{2^n}\\ 0 & \text{pre ostatné } x\in\langle 0,1\rangle\end{cases}\qquad \begin{gathered}h_{n1}(0)=1\,,\\ h_{nj}(0)=0 \text{ pre } j=2,3,\dots 2^n\end{gathered}$$

Cvičenie. Načrtnite graf funkcií h_{11}, h_{12}, h_{21}, h_{22}, h_{23}, h_{24}.

Funkcie h_{00} a h_{nj}, $n=0,1,2,\dots$, $j=1,2,\dots,2^n$ sú v priestore $L^2\langle 0,1\rangle$ navzájom ortogonálne. Ak ich usporiadame v poradí
$h_{00},h_{01},\,h_{11},h_{12},\,h_{21},h_{22},h_{23},h_{24},h_{31},\dots$ a vydelíme normou dostaneme ortonormálny systém, ktorý sa nazýva Haarov systém. Jeho výhodou je, že rozvoj každej funkcie f integrovateľnej na $\langle 0,1\rangle$ podľa Haarovho systému je konvergentný ku funkcii f takmer všade. (Pre klasický Fourierov rad to nie je pravda).

Z Haarovho systému je odvodený Walshov ortonormálny systém, ktorý sa často používa v teórii diskrétnych signálov.

Haarove funkcie sa dajú skonštruovať aj indukciou:

1. Funkcia $h_1(x) = 1$ pre $\forall x \in I = \langle 0, 1\rangle$ a D_1 je delenie intervalu X pozostávajúce z jediného intervalu (t.j. X). $\|h_1\| = \int_0^1 |h_1(x)|^2 \mathrm{d}x = 1$.
2. Teraz rozdelíme interval X na dva rovnako dlhé disjunktné intervaly $P' = \langle 0, \frac{1}{2}\rangle$, $P'' = (\frac{1}{2}, 1\rangle$ (deliaci bod patrí do ľavého intervalu). Funkcia $h_2(x) = 1$ pre $x \in P'$, $h_2(x) = -1$ pre $x \in P''$, $\|h_2\| = 1$. Vznikne nové delenie D_2 intervalu X na dva intervaly P_1, P_2.
3. Ak už sme skonštruovali funkciu h_n a delenie D_n intervalu X na intervaly $P_1, P_2, \ldots, P_n$, tak z tých deliacich intervalov, ktoré majú najväčšiu dĺžku nájdeme deliaci interval P_k, ktorý je najviac vľavo. (k je najmenšie číslo, pre ktoré je dĺžka intervalu $P_k \geq$ ako dĺžky všetkých ostatných deliacich intervalov). Interval P_k rozdelíme na dva rovnako dlhé disjunktné intervaly P', P'', pričom deliaci bod patrí do ľavého intervalu a definujeme $h_{n+1}(x) = a$ pre $x \in P'$, $h_{n+1}(x) = -a$ pre $x \in P''$ a $h_{n+1}(x) = 0$ pre ostatné $x \in X$. Číslo $a > 0$ zvolíme tak, aby bola norma $\|h_{n+1}\| = 1$. Vznikne tiež nové delenie D_{n+1} intervalu X na $n+1$ deliacich intervalov.

Pre $m < n$ skúmajme súčin funkcií $h_m(x) \cdot h_n(x)$. Ak $I_m = \{x \in X : h_m(x) \neq 0\}$, $I_n = \{x \in X : h_n(x) \neq 0\}$, tak platí buď $I_m \cap I_n = \emptyset$ alebo $I_n \subset I_m$. V prvom prípade je $h_m \cdot h_n = 0$, v druhom prípade je má funkcia h_m na intervale I_n konštantnú hodnotu c, teda $h_m \cdot h_n = c \cdot h_n$. V oboch prípadoch je $\int_0^1 h_m(x) \cdot h_n(x) \mathrm{d}x = 0$.

Bez dôkazu teraz uvedieme základné vlastnosti Haarovho systému. Pre každú funkciu $f \in L^p = L^p\langle 0, 1\rangle$, $1 \leq p \leq \infty$ sa dá vypočítať $(f, h_n) = \int_0^1 f(x) h_n(x) \mathrm{d}x$. K funkcii $f \in L^p$ môžeme teda formálne priradiť rozvoj podľa Haarovho systému:

$$f \sim \sum_{n=1}^{\infty} (f, h_n) h_n \,.$$

Predchádzajúci rozvoj môžeme pomocou funkcií h_{nj} napísať ako

$$f(x) \sim (f, h_{00}) + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{2^n} \frac{1}{\|h_{nj}\|^2} (f, h_{nj}) h_{nj}(x) = (f, h_{00}) + \sum_{n=0}^{\infty} 2^n \sum_{j=1}^{2^n} (f, h_{nj}) h_{nj}(x) \,.$$

Veta. *Rozvoj každej funkcie $f \in L^p$ podľa Haarovho systému konverguje k funkcii f takmer všade. Ak $p < \infty$ konverguje tento rozvoj k funkcii f aj v norme priestoru L^p.*

Walshov ortonormálny systém.

Ďalším ortonormálnym systémom po častiach konštantných funkcií je Walshov systém. Obyčajne sa definuje na intervale $\langle 0, 1\rangle$ najprv Rademacherov systém:

$$r_n(0) = 1 \,, \qquad r_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{pre } (k-1)/2^n < x \leq k/2^n \,, \quad k \text{ nepárne} \\ -1 & \text{pre } (k-1)/2^n < x \leq k/2^n \,, \quad k \text{ párne} \end{cases} \,, \quad k = 1, 2, \ldots, 2^n \,,$$

$n = 1, 2, \ldots$. Platí nasledujúci vzťah medzi Haarovým a Rademacherovým systémom:

$$r_n = 2^{(1-n)/2} \left(h_{2^{n-1}+1} + h_{2^{n-1}+2} + \cdots + h_{2^n} \right) \,.$$

Odtiaľ dostávame pre $m \neq n$ $(r_n, r_m) = 0$. Pretože je $(r_n(x))^2 = 1$ je zrejmé, že $\|r_n\| = 1$. Teda Rademacherov systém je ortonormálny. Nie je však úplný. Na to, aby bol úplný treba k nemu ešte nejaké funkcie pridať. Jednou z možností je pridať funkciu $r_0(x) = 1$ a všetky možné konečné súčiny Rademacherových funkcií tvaru $r_{j_1} r_{j_2} \cdots r_{j_n}$ ($j_1 < j_2 < \cdots < j_n$, $n = 1, 2, \ldots$). Presnejšie:

Definícia. Walshov systém $\{w_n\}_{n=1}^{\infty}$ tvoria funkcie

$$w_1(x) = 1 \,, \quad w_n(x) = r_{k_1+1} r_{k_2+1} \cdots r_{k_m+1} \,, \quad \text{kde} \quad 0 \leq k_1 < k_2 < \cdots < k_m \,, \; n - 1 = 2^{k_1} + 2^{k_2} + \cdots + 2^{k_m}$$

($n - 1 = 2^{k_1} + 2^{k_2} + \cdots + 2^{k_m}$ je vyjadrenie čísla $n-1$ v dvojkovej sústave).

Rozvoj funkcie podľa Walshovho systému súvisí s rozvojom podľa Haarovho systému, konkrétne 2^m-tý čiastočný súčet oboch rozvojov sa zhoduje pre všetky $m = 0, 1, 2, \ldots$.

Ortogonálne polynómy.

Ak $I \subset R$ je interval, tak funkcie $f_n\colon I \to R$, $f_n(x) = x^n$ $(n = 0, 1, 2, \dots)$ sú lineárne nezávislé. Ak na priestore funkcií na I definujeme vhodne skalárny súčin, tak pomocou Gram-Schmidtovho procesu získame z f_n ortonormálnu postupnosť g_n a pomocou nej rôzne typy ortogonálnych polynómov.

1. Legendrove polynómy $L_n(x)$, ak $I = \langle -1, 1\rangle$ a $(f, g) = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\mathrm{d}x$. Pritom

$$g_n(x) = \sqrt{\frac{2n+1}{2}} L_n(x)\,, \quad L_0(x) = 1\,,\ L_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^2-1)^n \text{ pre } n > 0$$

Ukážeme, že polynómy $P_n(x) = \dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^2-1)^n$ tvoria ortogonálny systém: Nech je $n \geq m$. Pre $k = 0, 1, \dots, n-1$ je $\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}(x^2-1)^n\Big|_{x=\pm 1} = 0$. Integrovaním per partes potom dostaneme

$$\int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x) = -\int_{-1}^{1} \frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}}(x^2-1)^m \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(x^2-1)^n dx = \cdots = (-1)^n \int_{-1}^{1} \frac{d^{m+n}}{dx^{m+n}}(x^2-1)^m (x^2-1)^n dx\,.$$

Ak je $m < n$, tak je $\frac{d^{m+n}}{dx^{m+n}}(x^2-1)^m = 0$, ak $m = n$, tak $\frac{d^{m+n}}{dx^{m+n}} = (2n)!$ a

$$\int_{-1}^{1} P_n^2(x)dx = (2n)! \int_{-1}^{1} (x^2-1)^n dx = \frac{(n!)^2 \cdot 2^{2n+1}}{2n+1}\,.$$

Potom $\dfrac{\sqrt{2n+1}}{n! 2^n \sqrt{2}} P_n$ tvoria úplný ortonormálny systém.

2. Čebyševove polynómy $T_n(x)$, ak $I = \langle -1, 1\rangle$ a $(f, g) = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$.

$$g_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} T_n(x)\,, \quad T_n(x) = \cos(n \arccos x) \quad (n \geq 0)$$

3. Hermitove polynómy $H_n(x)$, ak $I = (-\infty, \infty)$ a $(f, g) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)e^{-x^2}\mathrm{d}x$.

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2}\left(e^{-x^2}\right)^{(n)}\,, \quad g_n(x) = \sqrt{\frac{1}{2^n n! \sqrt{\pi}}} H_n(x) \quad (n \geq 0)$$

Prvé Hermitove polynómy sú $H_0(x) = 1$, $H_1(x) = 2x$, $H_2(x) = 4x^2 - 2$, $H_3(x) = 8x^3 - 12x$, ... Dá sa ukázať, že H_k je riešenie Hermitovej diferenciálnej rovnice

$$\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}x^2} - 2x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + 2ku = 0\,, \quad x \in R\,,$$

ktorá sa tiež často vyskytuje v aplikáciách. **4.** Laguerrove polynómy $L_n(x)$ vzniknú z postupnosti x^n Gram-Schmidtovým procesom, ak $I = \langle 0, \infty)$ a $(f, g) = \int_0^{\infty} f(x)g(x)e^{-x}\mathrm{d}x$.

$$g_n(x) = L_n(x) = \frac{1}{n!} e^x \left(e^{-x} x^n\right)^{(n)}\,, \quad (n \geq 0)\,.$$

Laguerrove polynómy sú riešenia Laguerrovej diferenciálnej rovnice

$$x\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}x^2} + (1-x)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + ku = 0\,, \quad x \in (0, \infty)\,,$$

ktorá sa tiež často vyskytuje v aplikáciách.

Fourierova transformácia — Plancherelova veta.

Analógia Parsevalovej vety (pre Fourierove rady) platí aj pre Fourierovu transformáciu. Pre komplexné Fourierove rady v $L^2\langle -\pi, \pi\rangle$ Fourierove koeficienty funkcie f sú

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\, dx \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

a Parsevalova rovnosť má tvar

$$2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx\,.$$

Analógiou Fourierovho radu (pre "nekonečnú" periódu) je Fourierova transformácia, ktorá sa definuje pre funkcie z L^1. Ak funkcia patrí do L^2 nemusí patriť do L^1, aj tak však možno definovať Fourierovu transformáciu, avšak nevlastný integrál konverguje v norme priestoru L^2 (nemusí bodovo).

Plancherelova veta. *(1910) Pre každú funkciu $f \in L^2(-\infty,\infty)$ platí pre každé N*

$$g_N(\lambda) = \int_{-N}^{N} f(x) e^{-i\lambda x} dx$$

do $L^2(-\infty,\infty)$ a v norme priestoru L^2 existuje $\lim_{N\to\infty} g_N = g$. Pre funkciu $g(\lambda)$ platí

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g(\lambda)|^2 d\lambda = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx \,.$$

Funkcia g sa nazýva Fourierova transformácia funkcie f. Ak funkcia $f \in L^1$, tak sa g zhoduje s obyčajnou Fourierovou transformáciou funkcie f.