FUNKCIONÁLNA ANALÝZA

Doc. Michal Zajac, CSc., KM FEI STU

Úvod

Väčšina prednášky je vybraná z knihy: Arch W. Naylor — George R. Sell, Teória lineárnych operátorov v technických a prírodných vedách. Odkaz [N-S, str. 50] znamená str. 50 slovenského vydania (ALFA, Bratislava 1981). Ďalšou vhodnou literatúrou sú knihy:

László Máté, Hilbert Space Methods in Science and Engineering, Akadémiai kiadó Budapest 1989
Michael Pedersen, Functional Analysis in Applied Mathematics and Engineering, Chapman & Hall/CRC Boca Raton 2000 (jednosemestrálny kurz určený študentom Technickej univerzity v Kodani)

1. Metrické a a lineárne normované priestory

Pojem metriky je zovšeobecnením vzdialenosti dvoch bodov v trojrozmernom priestore (podrobnejšie v [N-S, kapitola 3]).

Definícia. Metrickým priestorom sa nazýva dvojica (X, d), kde X je neprázdna množina a $d\colon X \times X \to R$ je funkcia, ktorá určuje vzdialenosť (metrika), t.j. spĺňa pre $\forall x, y, z \in X$ vlastnosti:

M1 (Nezápornosť) $\forall x, y \in X$ $d(x, y) \geq 0$, $d(x, x) = 0$;
M2 (Kladnosť) Ak $d(x, y) = 0 \implies x = y$ (inak povedané vzdialenosť dvoch rôznych bodov je nenulová).
M3 (Symetria) $d(x, y) = d(y, x)$
M4 (trojuholníková nerovnosť) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

V aplikáciách je množina X spravidla množinou funkcií a pojem metriky umožňuje preniesť veľa z metód matematickej analýzy na všeobecnejšie priestory. Prvým príkladom bude pojem limity postupnosti:

Definícia. Nech (X, d) je metrický priestor. Hovoríme, že postupnosť $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ prvkov X konverguje k prvku $x \in X$, ak $\lim d(x_n, x) = 0$. Potom píšeme $\lim x_n = x$.

Pre diferenciálny počet reálnych funkcií jednej reálnej premennej (viacerých premenných) je základným pojmom pojem okolia bodu v R (okolia bodu v R^n). Oba sú špeciálnym prípadom všeobecnejšieho pojmu okolia bodu v metrickom priestore:

Definícia. Epsilonovým okolím bodu a metrického priestoru (X, d) sa nazýva množina $O_\varepsilon(a) = \{x \in X\colon d(x, a) < \varepsilon\}$

Pomocou $O_\varepsilon(a)$ sa dá potom analogicky ako v R^n definovať pojem vnútorný, vonkajší a hraničný bod množiny $A \subset X$, ako aj pojem ohraničenej množiny.

Cvičenie. Definujte vnútorný bod, vonkajší bod a hraničný bod podmnožiny metrického priestoru a pojem ohraničenej podmnožiny pomocou okolí bodov v metrickom priestore.

1.1 Príklady metrických priestorov.

Začneme príkladmi metrík v R^2, t.j. v rovine. Nech $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$ sú body v rovine. Potom funkcie

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}_2(x, y) &= \sqrt{|x_1 - y_1|^2 + |x_2 - y_2|^2} \qquad \text{(euklidovská metrika)}\\
\mathrm{d}_1(x, y) &= |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|\\
\mathrm{d}_\infty(x, y) &= \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}
\end{aligned}$$

sú metriky v R^2 (dokážte).

Cvičenie. Pre metriky d_1, d_2 a d_∞ znázornite epsilonové okolie bodu $(0,0)$ pre $\epsilon = 1$, $\epsilon = \frac{1}{10}$. Kedy postupnosť (x_n, y_n) konverguje vzhľadom na tieto metriky?

Pojem metriky umožňuje použiť geometrické myšlienky aj v kombinatorických úlohách. Ilustrujme to na nasledovnom jednoduchom príklade. Uvažujme množinu X všetkých usporiadaných štvoríc celých čísel a na nej nasledovnú metriku (počet zložiek, v ktorých sa štvorice líšia):

$$\mathrm{d}\big([a_1,a_2,a_3,a_4],[b_1,b_2,b_3,b_4]\big) = \sum_{i=1}^{4} \operatorname{sgn}|a_i - b_i|\,, \quad \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

Cvičenie. Nech Y je množina všetkých usporiadaných štvoríc zložených z čísel 0, 1, 2. Nájdite množinu $Y_0 \subset Y$ s čo najmenším počtom prvkov a s vlastnosťou:

$$\forall\, a = [a_1,a_2,a_3,a_4] \in Y \quad \exists\, b = [b_1,b_2,b_3,b_4] \in Y_0 \quad \text{také, že} \quad \mathrm{d}(a,b) \le 1\,.$$

Úloha je sformulovaná ako problém hľadania siete v podmnožine metrického priestoru:

Definícia. Nech (X,d) je metrický priestor $A \subset X$, $\varepsilon > 0$. Hovoríme, že $B \subset A$ je ε-sieť množiny A, ak sa dá A pokryť epsilonovými okoliami prvkov množiny B, t.j. ak

$$A \subset \bigcup_{b \in B} O_\varepsilon(b)$$

Riešenie úlohy: Všetkých štvoríc je $3^4 = 81$. Pre každú štvoricu b existujú 2 štvorice, ktoré sa líšia len v prvej zložke, dve len v druhej zložke, atď., spolu 8 štvoríc vzdialených od danej o presne 1. Spolu so samotnou štvoricou b je v $O_{1,1}(b)$ deväť prvkov. Ak by príslušné okolia prvkov množiny Y_0 nemali žiaden spoločný bod, na pokrytie 81 možných štvoríc by sme potrebovali $1,1$ sieť s deviatimi prvkami. Ak takú sieť nájdeme, máme istotu, že má najmenší možný počet prvkov. Nájdite aspoň dve také siete. Stačí, ak budete hľadať takých 9 štvoríc, že každé dve z nich majú vzdialenosť 3.

Definícia. Nech X je lineárny priestor nad R alebo nad C. Potom funkcia $\|\cdot\|$, ktorá každému vektoru $x \in X$ priradí reálne číslo $\|x\|$ sa nazýva norma, ak pre každé $x, y \in X$ a pre každý skalár α platí
N1 $\|x\| \ge 0$ (nezápornosť)
N2 $\|x+y\| \le \|x\| + \|y\|$ (trojuholníková nerovnosť
N3 $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$ (homogenita)
N4 $\|x\| = 0 \iff x = 0$ (kladná definitnosť)

Číslo $\|x\|$ sa nazýva norma prvku (vektora) $\|x\|$. Lineárny priestor spolu s nejakou normou nazývame normovaný priestor.

Cvičenie. *Ak $(X, \|\cdot\|)$ je normovaný priestor, tak $d(x,y) = \|x-y\|$ je metrika na X. Dokážte.*

Príklady metrických a normovaných priestorov.

Príklad 1. Množina X pozostáva zo všetkých usporiadaných n-tíc komplexných (reálnych) čísel, t.j. $X = C^n$ ($X = R^n$). Potom

$$\|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{1/p}, \quad \text{pre } 1 \le p < \infty\,,$$
$$\|x\|_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|\}$$

sú normy na X. Ľahko sa to ukáže pre $\|x\|_\infty$, $\|x\|_1$. Pre $\|x\|_p$ je ťažké dokázať trojuholníkovú nerovnosť. Tieto priestory sa obyčajne označujú l_p^n $(1 \le p \le \infty)$.

Príklad 2. Ak v predchádzajúcom príklade zameníme n za nekonečno, dostaneme priestor postupností. Nech l_p, $1 \le p < \infty$, je priestor všetkých postupností $x = (x_k)_{k=1}^\infty$ reálnych alebo komplexných čísel takých, že rad $\sum_{k=1}^\infty |x_k|^p$ konverguje. V tomto priestore je normou funkcia:

$$\|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p\right)^{1/p}.$$

Aj v priestore l_∞ všetkých ohraničených postupností môžeme definovať normu analogickú norme v R^n (C^n):

$$\|x\|_\infty = \sup_{k \ge 1} |x_k|\,.$$

Príklad 3. Nech B je množina všetkých nekonečných postupností prirodzených čísel $n = (n_1, n_2, \dots)$ a nech d je definované predpisom:

$$\mathrm{d}(n,m) = \begin{cases} 0\,, & \text{ak } n_i = m_i \text{ pre } i = 1,2,\dots \\ \frac{1}{k}\,, & \text{kde } k \text{ je prvý index, pre ktorý } n_i \neq m_i. \end{cases}$$

Potom d je metrika (dokážte). Metrický priestor (B, d) sa nazýva Bairov nulový priestor. Metrika v ňom nie je odvodená od žiadnej normy. Touto metrikou sa dá vyjadrovať presnosť prenosu signálov v diskrétnom čase. Vyjadruje ako dlho pracoval systém bez poruchy.

Príklad 4. Nech je teraz $T > 0$. Budeme definovať normy na priestore reálnych alebo komplexných funkcií na $\langle 0, T\rangle$. Nech $X = C\langle 0, T\rangle$ je priestor všetkých spojitých funkcií na $\langle 0, T\rangle$. Potom môžeme definovať analogicky ako na priestore postupností normy:

$$\|x\|_\infty = \sup_{t\in\langle 0,T\rangle} |x(t)|$$

$$\|x\|_p = \left[\int_0^T |x(t)|^p \mathrm{d}t\right]^{1/p}, \quad 1 \le p < \infty\,.$$

V predchádzajúcom príklade je integrovateľnosť funkcií zaručená tým, že predpokladáme spojitosť. Integrál je v tomto prípade Riemannov (t.j. určitý integrál, ktorý sa preberá v prvom ročníku). Nasledujúci príklad ukazuje tzv. neúplnosť Riemannovho integrálu, čo spôsobuje ťažkosti pri definovaní normovaných priestorov. Tieto sa prekonajú použitím všeobecnejšieho Lebesgueovho integrálu. Ten však nebudeme definovať. Pre spojité funkcie je zhodný s Riemannovým. Každá riemannovsky integrovateľná funkcia je aj lebesgueovsky integrovateľná a jej Lebesgueov integrál sa rovná jej Riemannovmu integrálu.

Príklad 5. Môže sa stať, že postupnosť Riemannovsky integrovateľných funkcií konverguje k funkcii, ktorá nie je Riemannovsky integrovateľná, a pritom môže byť aj ohraničená:

$$f_n(t) = \begin{cases} 1\,, & \text{ak } t = \frac{k}{n!}\,,\ k \text{ celé} \\ 0\,, & \text{inak} \end{cases} \qquad n = 1,2,\dots$$

Táto postupnosť konverguje k funkcii

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{ak } t \text{ je racionálne} \\ 0 & \text{ak } t \text{ je iracionálne} \end{cases}$$

Ukážte, že $\int_a^b f_n(t)\mathrm{d}t = 0$ pre každé n, ale funkcia $f(t)$ nie je Riemannovsky integrovateľná. Lebesgueov integrál sa dá skonštruovať aj tak, že sa za istých podmienok dodefinuje pre limity Riemannovsky integrovateľných funkcií vzťahom

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(t)\mathrm{d}t = \int_a^b \big[\lim_{n\to\infty} f_n(t)\big]\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t\,.$$

Príklad 6. Pre $1 \le p < \infty$ a pre nejaký interval I definujme priestor $X = L_p(I)$ ako množinu všetkých funkcií $x(t)$ definovaných na I, pre ktoré

$$\int_I |x(t)|^p \mathrm{d}t < \infty \quad \text{(integrál je Lebesgueov)}$$

Definujme normu $\|x\|_p = \left[\int_I |x(t)|^p \mathrm{d}t\right]^{1/p}$.

V predchádzajúcom príklade je chyba. Definovaná norma nemá totiž vlastnosť $\|x\| = 0 \iff x = 0$. To sa odstráni tak, že rovnosť funkcií sa rozumie rovnosť vo všetkých bodoch intervalu I okrem bodov množiny miery nula. Pritom miera množiny M je tu Lebesgueov integrál z jej charakteristickej funkcie:

$$\chi_M(t) = 1\,,\ \text{ak } t \in M\,, \qquad \chi_M(t) = 0\,,\ \text{ak } t \notin M\,.$$

Ak nejaký vzťah platí všade okrem množiny miery nula, hovoríme, že platí takmer všade. Norma $\|x\|_\infty$ sa preto nedefinuje na funkciách ohraničených na I, ale na priestore funkcií ohraničených takmer všade.

$$\|x\|_\infty = \operatorname*{esssup}_{t\in I} |x(t)| = \inf\{B\colon |x(t)| \le B \text{ takmer všade}\}$$

Priestory L^p sa často používajú aj v aplikáciách, osobitnú úlohu hrajú prípady $p = 2$ a $p = \infty$, ktorým sa budeme venovať neskoršie.

Cvičenia. [N-S, str. 56, 64–65]

1. Pre R^2 s normami d_p, $1 \le p < \infty$ načrtnite jednotkové okolie bodu $(0,0)$.
2. Ukážte, že pre pevné $(x,y) \in R^2$ je funkcia $\varphi(p) = \|(x,y)\|_p$ nerastúca na intervale $\langle 1, \infty)$. Návod: ukážte, že pre $0 < a < 1$ je $f(x) = a^x$ klesajúca funkcia a implikáciu $p < q \implies \|(x,y)\|_p \ge \|(x,y)\|_q$ ukážte najprv pre prípad $\|(x,y)\|_p = 1$.
3. Nech X označuje množinu všetkých komplexných funkcií $f(z)$ analytických pre $|z| < 1$. Nech

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\,, \qquad g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$$

sú ich Taylorove rady. Rozhodnite, ktoré z nasledujúcich funkcií sú metriky alebo normy.
   a. $\|f\| = \sup\{|f(z)|\colon |z| \le \rho\}$, kde $0 < \rho < 1$
   b. $\mathrm{d}(f,g) = |a_0 - b_0|$
   c. $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n - b_n|\rho^n$, kde $0 < \rho < 1$
4. Nech S je neprázdna množina. Nech $X = B(S)$ označuje množinu všetkých ohraničených reálnych funkcií definovaných na S. Ukážte, že

$$\|f\| = \sup\{|f(s)|\colon s \in S\}$$

je normou na $B(S)$
5. Nech X je neprázdna množina. Ukážte, že

$$d(x,y) = \begin{cases} 1\,, & \text{ak } x \ne y \\ 0\,, & \text{ak } x = y \end{cases}$$

je metrika. Tejto metrike hovoríme diskrétna metrika.
6. Nech $d(x,y)$ je metrika na množine X. Ukážte, že aj $d_1(x,y) = \dfrac{d(x,y)}{1 + d(x,y)}$ je metrika na množine X. Ukážte, že postupnosť $\{x_n\}$ konverguje k bodu x v priestore (X,d) vtedy a len vtedy, ak k bodu x konverguje v priestore (X,d_1).

2. Limita a spojitosť funkcií v metrických priestoroch

Pojem metriky umožňuje definovať limitu a spojitosť funkcie, ktoré sú zovšeobecnením týchto pojmov známych z analýzy funkcií jednej a viacerých reálnych premenných aj analýzy funkcií komplexnej premennej, ako príklad uvediem definíciu limity a spojitosti funkcie definovanej na nejakej podmnožine metrického priestoru X_1 a hodnotami v metrickom priestore X_2

Definícia. Nech (X_1, d_1), (X_2, d_2) sú metrické priestory. Nech $a \in X_1$ je hromadný bod množiny $A \subset X_1$, $b \in X_2$. Nech $f\colon A \to X_2$ potom $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, ak $\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0$ také, že

$$\forall x \in A \quad 0 < \mathrm{d}_1(x,a) < \delta \implies \mathrm{d}_2(f(x),b) < \varepsilon\,.$$

Funkcia f sa nazýva spojitá v bode a, ak platí

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)\,.$$

Cvičenia.

1. Nech $X = C\langle 0,1\rangle$ je priestor reálnych funkcií spojitých na intervale $\langle 0,1\rangle$ a $Y = C^1\langle 0,1\rangle$ je priestor reálnych funkcií raz spojito diferencovateľných na intervale $\langle 0,1\rangle$ a na oboch priestoroch použijeme suprémovú normu
$\|x\| = \sup_{t\in\langle 0,1\rangle} |x(t)|$. Ukážte, že
   a. Zobrazenie $F\colon X \to X$, $(Fx)(t) = \int_0^t x(\tau)\mathrm{d}\tau$, je spojité.
   b. Zobrazenie $F\colon Y \to X$, $(Fx)(t) = x'(t)$ nie je spojité.
2. Nech X je priestor všetkých spojitých funkcií $f\colon \langle -1,1\rangle$ a nech $\|f\|_1 = \int\limits_{-1}^{1} |f(x)|\mathrm{d}x$.
   a. Ukážte, že $\|f\|_1$ je norma na X.

b. Nech $f_n(x) = \begin{cases} 0\,, & x \in \langle -1, 0\rangle\,, \\ nx\,, & x \in (0, \frac{1}{n})\,, \\ 1\,, & x \in \langle \frac{1}{n}, 1\rangle\,. \end{cases}$ Načrtnite grafy funkcií f_1, f_2, f_3. Ukážte, že platí nerovnosť $\|f_n - f_m\|_1 \le \frac{1}{2\min\{n,m\}}$.

c. Ukážte, že postupnosť f_n v priestore X s normou $\|f\|_1$ nekonverguje.

3. V priestore X z cvičenia 2 definujme ešte normu $\|f\|_\infty = \sup_{x\in\langle -1,1\rangle} |f(x)|$. Nech
$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & |x| > \frac{1}{n}\,, \\ 1 + nx & -\frac{1}{n} \le x \le 0\,, \\ 1 - nx & 0 < x \le \frac{1}{n}\,. \end{cases}$$
Ukážte, že vzhľadom k norme $\|\cdot\|_1$ postupnosť funkcií f_n konverguje k nule, ale vzhľadom k norme $\|\cdot\|_\infty$ tá istá postupnosť nie je konvergentná.

4. Základom H^∞ riadenia je využitie istých vlastností operátora S jednostranného posunutia na priestore l^2 všetkých postupností $\mathbf{x} = \{x_n\}_{n=0}^\infty$ komplexných čísel, pre ktoré konverguje rad $\sum_{n=0}^\infty |x_n|^2$ a norma je $\|\mathbf{x}\| = \left(\sum_{n=0}^\infty |x_n|^2\right)^{1/2}$. Pritom S je definovaný nasledovne
$$S(x_0, x_1, x_2, \dots) = (0, x_0, x_1, \dots), \text{ t.j. ak } S\mathbf{x} = \mathbf{y}, \text{ tak } y_0 = 0, y_n = x_{n-1}\,, n = 1, 2, \dots$$
Ukážte, že S je spojité zobrazenie.

Operátor S z cvičenia 2 má aj vlastnosť, že nemení normu zobrazovanej postupnosti. Pretože je navyše aj lineárny nemení ani vzdialenosť. Je izometrický v zmysle nasledujúcej definície.

Definícia. Nech (X, d_1) a (Y, d_2) sú metrické priestory. Zobrazenie $\varphi\colon X \to Y$ sa nazýva izometrické, ak pre každú dvojicu $x_1, x_2 \in X$ platí $d_2\big(\varphi(x_1), \varphi(x_2)\big) = d_1(x_1, x_2)$.

3 Úplné priestory

Z MA1 a MA2 je známe, že niektoré funkcie je výhodné definovať ako súčet nekonečného radu. Pritom sa „tajne" využíva, že R^n, C s obvyklými normami sú úplné priestory, t.j. priestory v ktorých platí Cauchyho-Bolzanova podmienka konvergencie postupnosti.

Definícia. Nech (X, d) je metrický priestor a nech $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ je postupnosť prvkov X. Hovoríme, že postupnosť $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ je cauchyovská, ak pre ňu platí:
$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n(\varepsilon) \text{ také, že } n, m > n(\varepsilon) \implies \mathrm{d}(x_n, x_m) < \varepsilon\,.$$

Veta. *Každá konvergentná postupnosť prvkov metrického priestoru je cauchyovská.*

Dôkaz. Ak $\lim x_n = x$, tak pre každé $\varepsilon > 0$ existuje $n(\varepsilon) \in N$ také, že $\mathrm{d}(x_n, x) < \varepsilon/2$. Preto platí (podľa trojuholníkovej nerovnosti):
$$\forall n, m > n(\varepsilon) \quad \mathrm{d}(x_n, x_m) \le \mathrm{d}(x_n, x) + \mathrm{d}(x, x_m) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\,.$$
Teda postupnosť je naozaj cauchyovská.

Definícia. Metrický priestor, v ktorom je každá cauchyovská postupnosť konvergentná (t.j. má limitu) sa nazýva úplný.

Priestory L^p sú úplné (to je zabezpečené práve použitím Lebesgueovho integrálu namiesto Riemannovho). Aj priestory postupností l_p sú úplné. Dôkazy týchto faktov nie sú triviálne a vynecháme ich.

Cvičenia.

1. Dokážte, že cauchyovská postupnosť v metrickom priestore (X, d) je konvergentná práve vtedy, keď obsahuje aspoň jednu konvergentnú podpostupnosť.
2. Nech podpriestor (B, d_2) priestoru (l^2, d_2) $\left(\mathrm{d}_2(x, y) = \left(\sum_{k=1}^\infty |x - y|^2\right)^{1/2}\right)$ pozostáva zo všetkých postupností, ktoré majú len konečný počet nenulových členov. Ukážte, že (B, d_2) nie je úplný priestor. Návod: Ukážte, že postupnosť x_n, kde
$$\begin{aligned} x_1 &= (1, 0, 0, \dots, 0, 0, 0, \dots) \\ x_2 &= (1, \frac{1}{2}, 0, \dots, 0, 0, 0, \dots) \\ &\vdots \\ x_n &= (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, 0, 0, \dots) \\ &\vdots \end{aligned}$$

je cauchyovská, ale nie je konvergentná v (B, d_2).

3. Dokážte, že $(l^\infty, \mathrm{d}_\infty)$ je úplný metrický priestor.
   Návod: Využite úplnosť priestoru R a výsledok cvičenia 1.

*4. Ukážte, že priestor $X = C\langle 0,1\rangle$ s normou $\|f\|_\infty = \sup_{x\in\langle 0,1\rangle} |f(x)|$ je úplný.

Konvergencia mnohých algoritmov v numerickej matematike je založená na veľmi jednoduchom princípe kontraktívnych zobrazení.

Definícia. Nech (X, d) je metrický priestor. Zobrazenie $f\colon X \to X$ sa nazýva kontraktívne, ak

$$\exists k \in (0,1) \text{ také, že } \mathrm{d}(f(x), f(y)) \le k \cdot \mathrm{d}(x,y)\,.$$

Inými slovami kontraktívne zobrazenie prevedie každú dvojicu bodov v metrickom priestore na dvojicu bodov s menšou vzájomnou vzdialenosťou.

Banachova veta o pevnom bode. *Nech (X, d) je úplný metrický priestor a nech $f\colon X \to X$ je kontraktívne zobrazenie. Potom existuje práve jeden bod $x_0 \in X$, pre ktorý*

$$f(x_0) = x_0\,.$$

Navyše, ak $x_1 \in X$ je ľubovoľné a rekurentne definujeme

$$x_{n+1} = f(x_n)\,, \qquad \text{tak} \qquad \lim_{n\to\infty} x_n = x_0\,.$$

Dôkaz. Existuje $k \in (0,1)$ také, že $\mathrm{d}(f(x), f(y)) \le k\mathrm{d}(x,y)$ pre každú dvojicu prvkov $x, y \in X$. Ak by $f(x_0) = x_0$ aj $f(y_0) = y_0$, tak

$$\mathrm{d}(x_0, y_0) = \mathrm{d}(f(x_0), f(y_0)) \le k\mathrm{d}(x_0, y_0) \implies \mathrm{d}(x_0, y_0) = 0 \implies x_0 = y_0\,.$$

Tým je dokázaná jednoznačnosť. Na dôkaz existencie pevného bodu stačí ukázať, že postupnosť x_n je cauchyovská, preto konvergentná a

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} x_n = x_0$$
$$0 \le \mathrm{d}(f(x_n), f(x_0)) \le \mathrm{d}(x_n, x_0) \to 0 \implies x_0 = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)\,.$$

Cvičenia.

5. Dokážte, že platí nasledujúca verzia Banachovej vety o pevnom bode.
   Nech (X, d) je úplný metrický priestor a nech $f\colon X \to X$. Označme f^k funkciu zloženú z k funkcií f (t.j. $f^1 = f$, $f^{k+1}(x) = f(f^k(x))$). Ak $\exists k \in N$ také, že zobrazenie f^k je kontraktívne, tak má zobrazenie f pevný bod.
6. Pomocou cvičenia 5 dokážte, že integrálna rovnica

$$x(t) - \mu \int_a^b k(t,s)x(x)\mathrm{d}s = u(t)$$

   (kde $u \in C\langle a,b\rangle, \in C(\langle a,b\rangle \times \langle a,b\rangle)$ s=u známe funkcie, $\mu \in R$ je parameter a $x(t)$ je neznáma funkcia) má práve jedno riešenie, ak

$$|\mu| \le \left(\max_{t,s\in\langle a,b\rangle} |k(t,s)|(b-a)\right)^{-1}\,.$$

Príklad. Pomocou Banachovej vety o pevnom bode dokážeme existenciu a jednoznačnosť riešenia počiatočnej úlohy pre obyčajnú diferenciálnu rovnicu prvého rádu:

$$y' = f(x, y(x))\,, \qquad y(x_0) = y_0\,.$$

Najprv spresníme úlohu. Nech $I_1, I_2 \subset R$ sú otvorené intervaly, $x_0 \in I_1$, $y_0 \in I_2$. Predpokladáme, že $f\colon I_1 \times I_2 \to R$ je spojitá funkcia a spĺňa nasledujúcu (tzv. Lipschitzovu) podmienku

$$\exists \ell > 0 \text{ také, že } \forall t \in I_1\ \forall y_1, y_2 \in I_2 \quad |f(t,y_1) - f(t,y_2)| \le \ell|y_1 - y_2|\,.$$

Ukážeme, že potom existuje $\delta > 0$ a jednoznačne určená funkcia $y\colon (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \to I_2$ spĺňajúca danú počiatočnú podmienku a je riešením danej diferenciálnej rovnice.

Označme X množinu všetkých spojitých funkcií na intervale $\langle x_0 - \delta, x_0 + \delta\rangle$, ktoré spĺňajú podmienku $y(x_0) = y_0$ a uvažujme na ňom supremovu metriku d_∞. Ľahko sa ukáže, že to je úplný metrický priestor. Číslo δ určíme tak, aby bolo kontraktívne zobrazenie

$$T\colon X \to X \qquad (Ty)(x) = \int\limits_{x_0}^{x} f(t, y(t))\mathrm{d}t + y_0$$

Stačí pre $y_1, y_2 \in X$ odhadnúť $\mathrm{d}_\infty(Ty_1, Ty_2)$ (predpokladáme $x_0 < x$, pre $x < x_0$ by sme vymenili v integráli hranice):

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}_\infty(Ty_1, Ty_2) &= \sup_{|x-x_0|\le\delta} \left| \int\limits_{x_0}^{x} f(t, y_1(t))\mathrm{d}t + y_0 - \int\limits_{x_0}^{x} f(t, y_2(t))\mathrm{d}t - y_0) \right| \\
&= \sup_{|x-x_0|\le\delta} \left| \int\limits_{x_0}^{x} (f(t, y_1(t)) - f(t, y_2(t))\mathrm{d}t \right| \le \sup_{|x-x_0|\le\delta} \int\limits_{x_0}^{x} |(f(t, y_1(t)) - f(t, y_2(t))|\,\mathrm{d}t \\
&\le \sup_{|x-x_0|\le\delta} \int\limits_{x_0}^{x} \ell\big|(y_1(t) - y_2(t))\big|\mathrm{d}t \le \sup_{|x-x_0|\le\delta} \int\limits_{x_0}^{x} \ell\mathrm{d}_\infty(y_1, y_2)\mathrm{d}t \\
&= \sup_{(x-x_0)\le\delta} |x - x_0|\ell\mathrm{d}_\infty(y_1, y_2) = \delta\ell\mathrm{d}_\infty(y_1, y_2)\,.
\end{aligned}$$

Stačí teda vziať δ také, aby $\delta\ell < 1$ a zobrazenie T bude kontraktívne. Existuje potom jediná funkcia $y \in X$, ktorá spĺňa rovnicu

$$(Ty)(x) = y(x) = \int\limits_{x_0}^{x} f(t, y(t))\mathrm{d}t + y_0$$

$y(x_0) = y_0$ je zrejmé a derivovaním dostaneme

$$y'(x) = f(x, y(x))\,.$$

Jednoznačnosť riešenia tejto počiatočnej úlohy je tým síce dokázaná len lokálne na nejakom δ-okolí bodu x_0. Ak však funkcia f spĺňa Lipschitzovu podmienku všade, ľahko sa už ukáže jednoznačnosť riešenia na $(-\infty, \infty)$.

Príkladom neúplného metrického priestoru je aj množina všetkých racionálnych čísel Q s metrikou $\mathrm{d}(x, y) = |x - y|$. Vieme, že množina všetkých reálnych čísel s tak isto definovanou metrikou je úplný priestor. Podobná situácia je v metrických priestoroch všeobecne.

Veta. *Nech (X_0, d_0) je metrický priestor. Potom existuje množina $X \supseteq X_0$, a metrika d na množine X, ktorá je rozšírením metriky d_0 a pritom je priestor (X, d) úplný.*

Definícia. Zúplnením metrického priestoru (X_0, d_0) nazývame najmenší možný úplný metrický priestor (X, d), pre ktorý $X_0 \subseteq X$ a $\mathrm{d}(x, y) = \mathrm{d}_0(x, y)$ pre $\forall x, y \in X_0$.

V predchádzajúcej definícii by bolo treba ešte vysvetliť, čo znamená „najmenší možný”. Presne to nebudem vysvetľovať, voľne povedané to znamená, že k priestoru X_0 pridáme limity všetkých cauchyovských, ale nie konvergentných postupností prvkov priestoru X_0. V aplikáciách je veľmi často potrebné, naopak, pre nejaký úplný priestor poznať, čo najmenšiu podmnožinu, ktorej zúplnením dostaneme daný priestor. Nasledujúca veta (bez dôkazu) je príkladom takých tvrdení.

Veta. *Nech na $X_0 = C\langle a, b\rangle$ znamená priestor komplexných spojitých funkcií $\langle a, b\rangle \to C$. Nech*

$$d_1(x, y) = \int\limits_a^b |x(t) - y(t)|\,dt\,, \qquad d_2(x, y) = \left(\int\limits_a^b |x(t) - y(t)|^2\,dt\right)^{1/2}.$$

Potom zúplnením priestorov (X_0, d_1), (X_0, d_2) dostaneme po rade priestory $L^1(a, b)$, $L^2(a, b)$ všetkých funkcií $x(t)$, pre ktoré je $|x(t)|$, resp. $|x(t)|^2$ lebesgueovsky integrovateľná funkcia.