Skupina **C** – **riešenie.**

1. Nájdite $X_2 \cap X_3$ pričom $X_2 = \{x \in \mathbb{Z}; 2|x\} = \{2k; k \in \mathbb{Z}\}$, $X_3 = \{x \in \mathbb{Z}; 3|x\} = \{3k; k \in \mathbb{Z}\}$.
$X_2 \cap X_3 = \{x \in \mathbb{Z}; 6|x\} = \{6k; k \in \mathbb{Z}\}$ (5 bodov).

2. Nech ρ_1, ρ_2 sú binárne relácie na $\mathbb{Z}$ také, že $\rho_1 = \{(x,y) \in \mathbb{Z}^2; x - y = 5k, k \in \mathbb{Z}\}$ a $\rho_2 = \{(x,y) \in \mathbb{Z}^2; x - y = 5k^2, k \in \mathbb{Z}\}$. Zistite, ktorá z týchto relácií je ekvivalencia, a ak áno, nájdite jej zodpovedajúci rozklad množiny $\mathbb{Z}$ na triedy ekvivalencie.

ρ_1 je ekvivalencie, lebo je reflexívna, symetrická a tranzitívna.

Reflexívnosť: $(\forall x \in \mathbb{Z})\ (x,x) \in \rho_1$.
Platí, nakoľko $(\forall x \in \mathbb{Z})\ x - x = 0 = 5 \cdot 0$ (3 body).

Symetričnosť: $(\forall x, y \in \mathbb{Z})\ (x,y) \in \rho_1 \Rightarrow (y,x) \in \rho_1$.
Ak $(x,y) \in \rho_1$, tak $\exists k \in \mathbb{Z}$ také že $x - y = 5k$, potom $y - x = 5(-k)$ a $(y,x) \in \rho_2$, lebo $-k \in \mathbb{Z}$ (3 body).

Tranzitívnosť: $(\forall x, y, z \in \mathbb{Z})\ (x,y) \in \rho_1 \wedge (y,z) \in \rho_1 \Rightarrow (x,z) \in \rho_1$.
Ak $(x,y) \in \rho_1$, $(y,z) \in \rho_1$, tak $\exists k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ také že $x - y = 5k_1$, $y - z = 5k_2$, a preto $x - z = (x-y) + (y-z) = 5(k_1 + k_2)$ a $(x,z) \in \rho_1$, lebo $k_1 + k_2 \in \mathbb{Z}$ (3 body).

$[0]_{\rho_1} = \{5k; k \in \mathbb{Z}\}$, $[1]_{\rho_1} = \{5k+1; k \in \mathbb{Z}\}$, $[2]_{\rho_1} = \{5k+2; k \in \mathbb{Z}\}$, $[3]_{\rho_1} = \{5k+3; k \in \mathbb{Z}\}$, $[4]_{\rho_1} = \{5k+4; k \in \mathbb{Z}\}$, a preto hľadaný rozklad $\mathbb{Z}$ je $\{\{5k; k \in \mathbb{Z}\}, \{5k+1; k \in \mathbb{Z}\}, \{5k+2; k \in \mathbb{Z}\}, \{5k+3; k \in \mathbb{Z}\}, \{5k+4; k \in \mathbb{Z}\}\}$ (3 body).

ρ_2 nie je ekvivalencie, lebo nie je symetrická a tranzitívna.

Symetričnosť: napríklad $(5,0) \in \rho_2$, lebo $5 - 0 = 5 \cdot 1^2$ ale $(0,5) \notin \rho_2$ lebo $0 - 5 = -5 \neq 5k^2$ pre $k \in \mathbb{Z}$.
Tranzitívnosť: napríklad $(5,0),(0-5) \in \rho_2$, lebo $5 - 0 = 0 - (-5) = 5 \cdot 1^2$ ale $(5,-5) \notin \rho_2$ lebo $5 - (-5) = 10 = 5\sqrt{2}^2$ ale $\sqrt{2} \notin \mathbb{Z}$. (3 body).

3. Nech $B = \{1, 2, 4, 6, 12, 24, 48, 72, 144\}$ a "$|$" je binárna relácia na množine B taká, že $a|b$ značí "a delí b" (inými slovami, existuje $x \in \mathbb{Z}$ také že $b = a \cdot x$). Dokážte že $(B,|)$ je poset a nakreslite jeho diagram. Zistite či je $(B,|)$ zväz, a svoje tvrdenie odôvodnite.

$(B,|)$ je poset, lebo relácia $|$ je reflexívna, antisymetrická a tranzitívna.

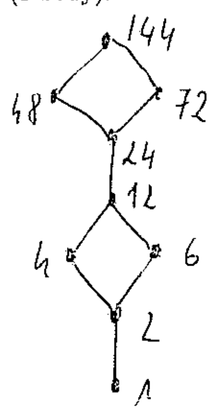
Reflexívnosť: $(\forall x \in B)\ x|x$.
Platí, nakoľko $(\forall x \in B)\ x = 1 \cdot x$, a $1 \in \mathbb{Z}$ (3 body).

Antisymetričnosť: $(\forall x, y \in B)\ x|y \wedge y|x \Rightarrow x = y$.
Ak $x|y$ a $y|x$, tak $\exists k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ také že $y = k_1 x$ a $x = k_2 y$, a preto $y = k_1 k_2 y$ a $k_1 k_2 = 1$. Toto je možné (pre $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$) iba ak $k_1 = k_2 = 1$ alebo $k_1 = k_2 = -1$. Druhý prípad však pre $x, y \in B$ nastať nemôže, a preto $x = y$ (3 body).

Tranzitív nosť: $(\forall x, y, z \in A)\ x|y \wedge y|z \Rightarrow x|z$.
Ak $x|y$ a $y|z$, tak $\exists k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ také že $y = k_1 x$ a $z = k_2 y$, a preto $z = k_2 k_1 x$, odtiaľ $x|z$ (3 body).

$(B,|)$ je zväz, pretože všetky dvojice z B majú supremum, a infimum v B (3 body).

Diagram $(B,|)$ (3 body):



4. Nech $\odot$ je binárna operácia na množine reálych čísiel $\mathbb{R}$ taká, že $a \odot b = (a \cdot b)/2$. Zistite či je $(\mathbb{R}^+, \odot)$ komutatívna grupa, pričom $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R}; x > 0\}$.

$\odot$ je binárna operácia na $\mathbb{R}^+$, pretože $(\forall x, y \in \mathbb{R}^+)\ x \odot y = xy/2 \in \mathbb{R}^+$ (4 body).

Asociatívnosť: $(\forall x, y, z \in \mathbb{R}^+)\ (x \odot y) \odot z = x \odot (y \odot z)$.
Platí, nakoľko $(x \odot y) \odot z = (xy/2) \odot z = (xy/2)z/2 = xyz/4 = x \odot (yz/2) = x \odot (y \odot z)$ (4 body).

Neutrálny prvok $(\exists e \in \mathbb{R}^+)(\forall x \in \mathbb{R}^+)\ x \odot e = e \odot x = x$.
Nakoľko $x \odot e = e \odot x = xe/2 = x$ dostaneme $e = 2$ (4 body).

Inverzný prvok $(\forall x \in \mathbb{R}^+)(\exists x^{-1} \in \mathbb{R}^+)\ x \odot x^{-1} = e$.
Nakoľko $x \odot x^{-1} = xx^{-1}/2 = e = 2$ dostaneme $x^{-1} = 4/x$ (4 body).

Komutatívnosť: $(\forall x, y \in \mathbb{R}^+)\ x \odot y = y \odot x$.
Platí, nakoľko $x \odot y = xy/2 = yx/2 = y \odot x$ (4 body).

$(\mathbb{R}^+, \odot)$ je komutatívna grupa.

5. Nech K_n označuje kompletný graf na n vrcholoch. Zistite, pre ktore kladné celé čísla n je K_n rovinný graf.

Grafy K_n, pre $n \geq 5$, obsahujú podgraf K_5, a preto podľa Kuratowského vety nie sú rovinné. $K + 1, \ldots, K_4$ sú roviné, lebo sa tak dajú nakresliť (5 bodov).

K_1 K_2 K_3 K_4

6. Predpokladajme že máme jednoduchý súvislý rovinný graf G ktorý má 20 vrcholov, pričom všetky majú stupeň 3. Na koľko obladtí (stien) rozdeľuje rovinná reprezentácia tohto grafu rovinu?

Pre rovinnú reprezentáciu grafu G, nech v je počet vrcholov, h je počet hrám, a o je počet oblastí. Keďže všetky vrcholy majú stupeň 3, dostaneme že $2h = 3v$ a preto $h = 3 \cdot 20/2 = 30$. Eulerov vzorec (pre súvisle grafy, t.j. s jedným komponentom) je $v + o - h = 2$, odkiaľ dostane me že $o = 30 - 20 + 2 = 12$ (10 bodov).