Skupina **A** – **riešenie.**

1. $\{1,2,3\} \cup \{2,4,5\} = \{1,2,3,4,5\}$ (2 body)
$\{1,2,3\} \cap \{2,4,5\} = \{2\}$ (2 body).

2. Nech $A = \{1, 2, \ldots, 10\}$ a ρ je binárna relácia na množine A taká, že $\rho = \{(x,y) \in A^2; x-y = 4k, k \in \mathbb{Z}\}$. Zistite či je ρ ekvivalencia, a ak áno, nájdite rozklad množiny A na triedy ekvivalencie.

ρ je ekvivalencie, lebo je reflexívna, symetrická a tranzitívna.

Reflexívnosť: $(\forall x \in A)\ (x,x) \in \rho$.
Platí, nakoľko $(\forall x \in A)\ x - x = 0 = 4 \cdot 0$ (3 body).

Symetričnosť: $(\forall x,y \in A)\ (x,y) \in \rho \Rightarrow (y,x) \in \rho$.
Ak $(x,y) \in \rho$, tak $\exists k \in \mathbb{Z}$ také že $x - y = 4k$, potom $y - x = 4(-k)$ a $(y,x) \in \rho$, lebo $-k \in \mathbb{Z}$ (3 body).

Tranzitívnosť: $(\forall x,y,z \in A)\ (x,y) \in \rho \wedge (y,z) \in \rho \Rightarrow (x,z) \in \rho$.
Ak $(x,y) \in \rho$, $(y,z) \in \rho$, tak $\exists k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ také že $x - y = 4k_1$, $y - z = 4k_2$, a preto $x - z = (x-y) + (y-z) = 4(k_1 + k_2)$ a $(x,z) \in \rho$, lebo $k_1 + k_2 \in \mathbb{Z}$ (3 body).

$[1]_\rho = \{1,5,9\}$, $[2]_\rho = \{2,5,10\}$, $[3]_\rho = \{3,7\}$, $[4]_\rho = \{4,8\}$, a preto hľadaný rozklad A je $\{\{1,5,9\},\{2,5,10\},\{3,7\},\{4,8\}\}$ (3 body).

3. Nech $B = \{1, 2, \ldots, 11\}$ a "$|$" je binárna relácia na množine B taká, že $a|b$ značí "a delí b" (inými slovami, existuje $x \in \mathbb{Z}$ také že $b = a \cdot x$). Dokážte že $(B, |)$ je poset a nakreslite jeho diagram. Zistite či je $(B, |)$ zväz, a svoje tvrdenie odôvodnite.

$(B, |)$ je poset, lebo relácia $|$ je reflexívna, antisymetrická a tranzitívna.

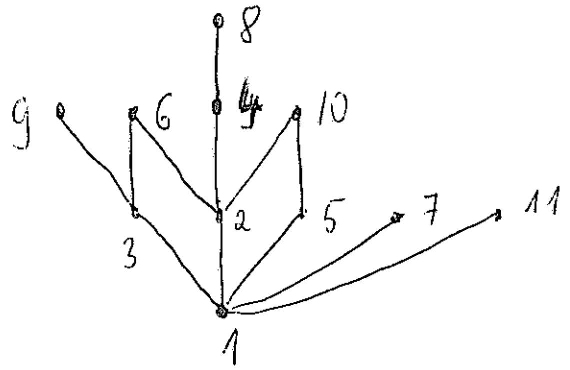
Reflexívnosť: $(\forall x \in B)\ x|x$.
Platí, nakoľko $(\forall x \in B)\ x = 1 \cdot x$, a $1 \in \mathbb{Z}$ (3 body).

Antisymetričnosť: $(\forall x,y \in B)\ x|y \wedge y|x \Rightarrow x = y$.
Ak $x|y$ a $y|x$, tak $\exists k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ také že $y = k_1 x$ a $x = k_2 y$, a preto $y = k_1 k_2 y$ a $k_1 k_2 = 1$. Toto je možné (pre $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$) iba ak $k_1 = k_2 = 1$ alebo $k_1 = k_2 = -1$. Druhý prípad však pre $x, y \in B$ nastať nemôže, a preto $x = y$ (3 body).

Tranzitív nosť: $(\forall x,y,z \in A)\ x|y \wedge y|z \Rightarrow x|z$.
Ak $x|y$ a $y|z$, tak $\exists k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ také že $y = k_1 x$ a $z = k_2 y$, a preto $z = k_2 k_1 x$, odtiaľ $x|z$ (3 body).

$(B, |)$ nie je zväz, pretože nie všetky dvojice z B majú supremum, napríklad dvojica 5, 7 suprémum v množine B nemá (3 body).

Diagram $(B, |)$ (2 body):



4. Nech $\oplus$ je binárna operácia na množine celých čísiel $\mathbb{Z}$ taká, že $a \oplus b = a + b - 3$. Zistite či je $(\mathbb{Z}, \oplus)$ komutatívna grupa. Ak áno, nájdite inverzné prvky k prvkom $4, 5, 6, 7, 8$.

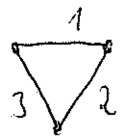
$\oplus$ je binárna operácia na $\mathbb{Z}$, pretože $(\forall x, y \in \mathbb{Z})\ x \oplus y = x + y - 3 \in \mathbb{Z}$ (nepovinné, lebo je to v zadaní).

Asociatívnosť: $(\forall x,y,z \in \mathbb{Z})\ (x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z)$.
Platí, nakoľko $(x \oplus y) \oplus z = (x+y-3) \oplus z = (x+y-3)+z-3 = x+y+z-6 = x \oplus (y+z-3) = x \oplus (y \oplus z)$ (5 bodov).

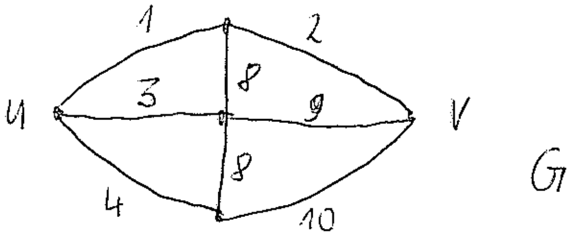
Neutrálny prvok $(\exists e \in \mathbb{Z})(\forall x \in \mathbb{Z})\ x \oplus e = e \oplus x = x$.
Nakoľko $x \oplus e = e \oplus x = x + e - 3 = x$ dostaneme $e = 3$ (5 bodov).
Inverzný prvok $(\forall x \in \mathbb{Z})(\exists x^{-1} \in \mathbb{Z})\ x \oplus x^{-1} = e$.
Nakoľko $x \oplus x^{-1} = x + x^{-1} - 3 = e = 3$ dostaneme $x^{-1} = 6 - x$ (5 bodov).
Komutatívnosť: $(\forall x, y \in \mathbb{Z})\ x \oplus y = y \oplus x$.
Platí, nakoľko $x \oplus y = x + y - 3 = y + x - 3 = y \oplus x$ (5 bodov).
$(\mathbb{Z}, \oplus)$ je komutatívna grupa.
Navyše $4^{-1} = 6 - 4 = 2$, $5^{-1} = 6 - 5 = 1$, $6^{-1} = 6 - 6 = 0$, $7^{-1} = 6 - 7 = -1$, $8^{-1} = 6 - 8 = -2$ (5 bodov).

5. Na obrázku sú diagramy grafov G_1 a G_2. Zistite a odôvodnite, ktorý z týchto grafov je Eulerovský. Pre Eulerovský graf nájdite aj Eulerovský ťah.

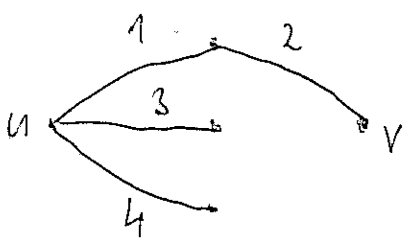
G_2 nie je Eulerovský, lebo má vrcholy nepárneho stupňa (2 body).
G_1 je Eulerovský, lebo je súvislý a má všetky vrcholy párneho stupňa. Eulerovský ťah je indukovaný na obrázku (3 body).



6. Na obrázku je diagram ohodnoteného grafu G. Nájdite minimálnu kostru grafu G a najkratšiu cestu z vrchola u do vrchola v.



Minimálna kostra (5 bodov).



Najkratšia cesta (5 bodov).