Meno a priezvisko: **krúžok:**

1.	2.	3.	4.	5.	6.	Σ

(1) **Teória:** Nech $\sim$ je nejaká ekvivalencia na množine A. Ako je definovaný rozklad $A/\sim$?

Toto a nič iné: $A/\sim = \{[a]_\sim : a \in A\}$. Hlavne nie definícia rozkladu, o tom tá otázka zjavne nie je.

Zaveďme nový jednoduchý pojem: hovoríme, že ekvivalencia $\sim$ na posete $(A, \leq)$ je *konvexná*, ak pre všetky $x, y, z \in A$ platí, že ak $x \leq y \leq z$ a $x \sim z$, potom $x \sim y$ aj $y \sim z$. Symbolicky:

$$(\forall x, y, z \in A)(x \leq y \leq z \text{ a zároveň } x \sim z) \Rightarrow (x \sim y \text{ a zároveň } y \sim z)$$

Uvažujme teraz poset $(A, \leq)$, kde $A = \{1, 2, 3, 4\}$ a $\leq$ je bežné usporiadanie prirodzených čísel.

(a) Dokážte, že ak $\sim$ je konvexná ekvivalencia na A, potom rozklad $A/\sim$ nemôže obsahovať množinu $\{1, 3\}$ ako svoju triedu. Napíšte nejakú inú neprázdnu podmnožinu množiny A, ktorú nemôže obsahovať rozklad podľa konvexnej ekvivalencie ako svoju triedu.

Keďže $\{1, 3\}$ je jedna z tried ekvivalencie, vidíme, že $1 \sim 3$. Ale zároveň vidíme aj, že $1 \not\sim 2$ a aj $2 \not\sim 3$ (jedno z toho nám stačí). Teda pre $x = 1, y = 2, z = 3$ je splnená ľavá strana implikácie definujúcej konvexitu ale nie pravá. Teda impikácia nie je pravdivá a $\sim$ nie je konvexná ekvivalencia.

Ďalšie „zakázané" triedy sú napr. $\{1, 4\}, \{2, 4\}, \{1, 3, 4\}$.

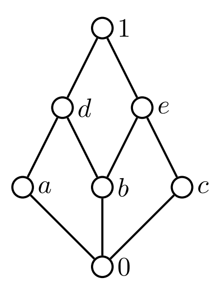
(b) Napíšte všetky rozklady A podľa konvexných ekvivalencií.

Je ich osem.

- $\{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}\}$;
- $\{\{1, 2\}, \{3\}, \{4\}\}$; $\{\{1\}, \{2, 3\}, \{4\}$; $\{\{1\}, \{2\}, \{3, 4\}\}$;
- $\{\{1, 2, 3\}, \{4\}$; $\{\{1\}, \{2, 3, 4\}\}$; $\{\{1, 2\}, \{3, 4\}\}$;
- $\{\{1, 2, 3, 4\}\}$.

(2) **Teória:** Definujte kongruenciu na zväze.

Nech L je tento zväz:



Nech Θ_1, Θ_2, Θ_3 sú ekvivalencie na L dané pomocou rozkladov takto:

$$L/\Theta_1 = \{\{0, a, b, d\}, \{c, e\}, \{1\}\}$$
$$L/\Theta_2 = \{\{0\}, \{a, b, c\}, \{d, e\}, \{1\}\}$$
$$L/\Theta_3 = \{\{0, a, b, d\}, \{c, e, 1\}\}$$

Pre každú z týchto Θ_i urobte toto:

- Ak Θ_i nie je kongruencia na L, dokážte že Θ_i nie je konguencia.

- Ak Θ_i je kongruencia na L, nakreslite diagram zväzu L/Θ_i.
  (a) *Θ_1 nie je: okrem iného $d\Theta_1 b$, $e\Theta_1 c$, avšak nie je pravda že $d \vee e = 1\Theta_1 e = b \vee c$.*
  (b) *Θ_2 nie je: okrem iného $a\Theta_2 a$, $a\Theta_2 b$, avšak nie je pravda že $a \vee a = a\Theta_2 d = a \vee b$.*
  (c) *Θ_3 je, faktorový zväz je zrejmý.*

  Niekto spopularizoval medzi pospolitým ľudom nesprávne tvrdenie, že ekvivalencia Θ na zväze je kongruencia práve vtedy, keď triedy ekvivalencie sú podzväzy. To nie je pravda (viď Θ_1). Je to nutná podmienka, ale nie postačujúca. Nejaký ten bod som za to dával, lepšie ako nič.

(3) **Teória:** Napíšte Lagrangeovu vetu.

Uvažujme grupu kvaterniónov $Q_8 = \{1, i, j, k, -1, -i, -j, -k\}$, ktorej Cayleyho tabuľka je

$\cdot$	-1	$-i$	$-j$	$-k$	1	i	j	k
-1	1	i	j	k	-1	$-i$	$-j$	$-k$
$-i$	i	-1	k	$-j$	$-i$	1	$-k$	j
$-j$	j	$-k$	-1	i	$-j$	k	1	$-i$
$-k$	k	j	$-i$	-1	$-k$	$-j$	i	1
1	-1	$-i$	$-j$	$-k$	1	i	j	k
i	$-i$	1	$-k$	j	i	-1	k	$-j$
j	$-j$	k	1	$-i$	j	$-k$	-1	i
k	$-k$	$-j$	i	1	k	j	$-i$	-1

(a) Nájdite podgrupu grupy Q_8 generovanú množinou $\{-j\}$ a nakreslite jej Cayleyho tabuľku.
$[\{-j\}] = \{1, -1, j, -j\}$.

(b) Nájdite dvojprvkovú podgrupu grupy Q_8 a nakreslite jej Cayleyho tabuľku. Nájdite všetky pravé kosety tejto podgrupy v grupe Q_8.
Jediná dvojprvková podgrupa Q_8 je $H = \{1, -1\}$. Napodiv zatiaľ skoro nikto nemal pravé kosety, bolo to špeciálne spravené tak, aby sa vám to robilo ľahko: $\{\{1, -1\}, \{i, -i\}, \{j, -j\}, \{k, -k\}\}$.

(c) Dokážte, že Q_8 nemá trojprvkovú podgrupu.
Q_8 má 8 prvkov, 3 nedelí 8, zvyšok je jasný z Lagrangeovej vety.
Dalo sa aj bez toho, ale bolo to ťažšie korektne dokázať, mohli ste ísť na vec napr. takto:
Každá trojprvková podgrupa H musí obsahovať aspoň jeden z prvkov $\{i, -i, j, -j, k, -k\}$. Každý z týchto prvkov však generuje štvorprvkovú podgrupu, čo je spor s predpokladom $|H| = 3$.

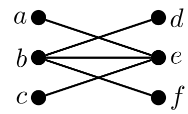
(4) **Teória:** Definujte permutáciu na množine.

Nech A je množina $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Uvažujme permutácie f, g množiny A dané predpismi $f(x) = 8 - x$, $g(x) = ((3x) \bmod 8)$, kde „mod 8" značí zvyšok po delení 8.

(a) Zapíšte f a g ako súčin cyklov.
(b) Určte rád f v grupe S_7.
(c) Vypočítajte $f \circ g$ a $g \circ f$ a výsledok zapíšte ako súčin cyklov.

Toto ste zbabrali. Pritom to bolo jednoduché.
$f = (17)(26)(35)$, $g = (13)(26)(57)$, *f má rád 2,* $f \circ g = g \circ f = (15)(37)$.
Robili ste toto: zapísali ste si napr. f *ako* (7654321) *a potom ste s ním narábali ako s cyklom.*
Ešte sa k tomuto príkladu vrátim, možno ho opravím znovu a menej prísne.

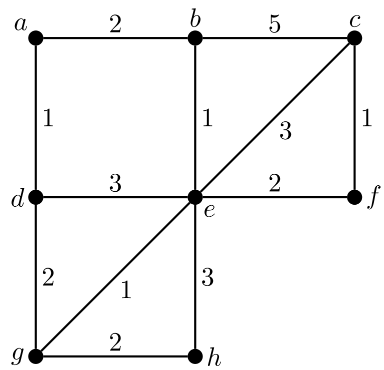
(5) **Teória:** Čo je invariant? (V teórii grafov, samozrejme.)
Nech G_1 je takýto graf.



(a) Nájdite 3 automorfizmy G_1 a zapíšte ich ako permutácie množiny vrcholov grafu G_1, t.j. ako súčin cyklov.
(b) Nakreslite nejaký súvislý jednoduchý bezslučkový graf G_2, ktorý má rovnako veľa vrcholov a hrán ako G_1, ale nie je izomorfný s G_1.
(c) Dokážte, že váš graf G_2 nie je izomorfný s grafom G_1.

Nebudem písať riešenie. Niektorí nevedia zapísať permutáciu. Vyskytovali sa nesprávne odpovede ako $(abc)(def)$.

(6) Dijkstrovým algoritmom určte najkratšie cesty z vrcholu a do všetkých vrcholov.



Nemilosrdne som strhával body tým, ktorí „predlžovali" cesty.