Skupina A

(1) Dokážte alebo vyvráťte: pre všetky množiny X, Y, Z platí
(a) $(X \setminus Y) \setminus (Z \setminus Y) = X \setminus (Y \cup Z)$
(b) $(X \setminus Y) \setminus (Z \cap Y) = X \setminus (Y \cap Z)$
Ak rovnosť platí, dokážte ju pomocou rovností na ťaháku. Ak neplatí, nájdite protipríklad.
Prvá platí:

$$(X \setminus Y) \setminus (Z \setminus Y) = (X \cap Y^C) \setminus (Z \cap Y^C) = (X \cap Y^C) \cap (Z \cap Y^C)^C =$$
$$= X \cap Y^C \cap (Z^C \cup Y^{C^C}) = X \cap Y^C \cap (Z^C \cup Y) = X \cap ((Y^C \cap Z^C) \cup (Y^C \cup Y)) =$$
$$= X \cap ((Y^C \cap Z^C) \cup \emptyset) = X \cap (Y^C \cap Z^C) = X \cap (Y \cup Z)^C = X \setminus (Y \cup Z)$$

Bol možný aj iný postup; distribuovať cez $\cup$ celý výraz $X \cap Y^C$, nielen Y^C. To je snáď jedno.
Druhá neplatí: protipríklad je napríklad $X = Y = \{1\}$, $Z = \emptyset$
Druhá skupina mala prehodené príklady a premenované množiny.

(2) Dokážte matematickou indukciou: pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\sum_{i=0}^{n} (i+2)^2 . 2^i = 2^n(2n^2 + 4n + 6) - 2$$

Pripomínam, že $0 \in \mathbb{N}$.
Kto to nevie, nie je mu pomoci. Za korektné $P(0)$ a vykonanie indukčného kroku boli 3 body, za záverečné úpravy bol 1 bod.

(3) Nech $\rho \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ je daná takto:

$$a \, \rho \, b :\Leftrightarrow a + 1 \leq b$$

Zistite, či je ρ reflexívna, symetrická, antisymetrická,tranzitívna.
(R) *Nie je, lebo $1 + 1 \not\leq 1$.*
(S) *Nie je, lebo $1 + 1 \leq 1000$ a zároveň $1000 + 1 \not\leq 1$.*
(AS) *Je.*
Dôkaz 1: Nech $x, y \in \mathbb{R}$ sú také, že $x + 1 \leq y$ a zároveň $y + 1 \leq x$. Zrejme $y \leq y + 1$. Máme teda $x + 1 \leq y \leq y + 1 \leq x$. Z tranzitivity $\leq$ vyplýva, že $x + 1 \leq x$. To však nie je pravda pre akékoľvek $x \in \mathbb{R}$. Teda ľavá strana (predpoklad) implikácie v (AS) pre ρ nie je pravdivá pre všetky $x, y \in \mathbb{R}$. Z toho vyplýva, že implikácia je pravdivá, a teda relácia ρ je (AS).
Dôkaz 2: Nech $x, y \in \mathbb{R}$ sú také, že $x + 1 \leq y$ a zároveň $y + 1 \leq x$. Keďže $x + 1 \leq y$, $x + 2 \leq y + 1$. Máme teda $x + 2 \leq y + 1 \leq x$. $\leq$ vyplýva, že $x + 2 \leq x$. Zvyšok dôkazu viď vyššie.
(T) *Je.*
Dôkaz 1: Nech $x, y, z \in \mathbb{R}$ sú také, že platí $x + 1 \leq y$ a zároveň $y + 1 \leq z$. Keďže $y \leq y + 1$, máme $x + 1 \leq y \leq y + 1 \leq z$. Teda $x + 1 \leq z$.
Dôkaz 2: Nech $x, y, z \in \mathbb{R}$ sú také, že platí $x + 1 \leq y$ a zároveň $y + 1 \leq z$. Keďže $x + 1 \leq y$, $x + 2 \leq y + 1$. Máme $x + 2 \leq y + 1 \leq z$. Teda $x + 2 \leq z$. Keďže $x + 1 \leq x + 2 \leq z$, $x + 1 \leq z$.

Dôkaz 3: Nech $x, y, z \in \mathbb{R}$ sú také, že platí $x+1 \leq y$ a zároveň $y+1 \leq z$. Keďže $y+1 \leq z$, $y \leq z-1$. Máme $x+1 \leq y \leq z-1$. Teda $x+1 \leq z-1$. Keďže $x+1 \leq z-1 \leq z$, $x+1 \leq z$.

(4) Nech $\sim$ je ekvivalencia na množine $\mathbb{R}^2$ daná takto:

$$(a_1, a_2) \sim (b_1, b_2) :\Leftrightarrow a_1.a_2 = b_1.b_2$$

Nakreslite, ako vyzerá $\mathbb{R}^2/\sim$ a vyznačte triedy ekvivalencie $[(0,0)]_\sim$, $[(1,1)]_\sim$ $[(-1,2)]_\sim$. Nemusíte dokazovať, že $\sim$ je ekvivalencia.

Rozklad bol „všetky hyperboly so stredom v (0,0) a osami rovnobežnými s osami x, y". Trieda ekvivalencie $(0,0)$ bola „degenerovaná hyperbola" — osi x, y. Ostatné dve hyperboly boli „normálne".

(5) Nech P je množina všetkých reálnych intervalov typu (a, b), $\langle a, b)$, $(a, b\rangle$, pričom $a, b \in \{1, 2, 3\}$ a $a < b$.

(a) Napíšte množinu P.

(b) Nakreslite diagram posetu $(P, \subseteq)$ a nájdite minimálne, maximálne, najmenšie a najväčšie prvky.

Nemusíte dokazovať, že $(P, \subseteq)$ je poset.

P mala 9 prvkov. Toto mal byť najľahši príklad. Ale nebol. Nerozumiem, ako niekto po dvoch semestroch vysokoškolskej matematiky a fyziky môže 5 minút bezradne čumieť na „problém" typu

$$(1, 2\rangle \subseteq (1, 3)$$

Ako ste potom, preboha, robili v prvom semestri priebehy? To ste intervaly používali spôsobom keď-kreslím-tú-tabuľku-čo-sa-tam-píše-či-tá-oná-rastie-alebo-klesá-tak-tam-musím-dať-také-čísla-v-okrúhlych-zátvorkách-lebo-to-tak-tí-matematici-chcú?