Skupina A - riešenie

Nie sú to jediné možné korektné riešenia. Protipríklady možno, samozrejme, nájsť aj iné. Takisto zdôvodnenie pravdivosti 1(b).

Skupina B má riešenia veľmi podobné, preto ich nepíšem.

(1) Dokážte alebo vyvráťte: pre všetky množiny X, Y, Z platí

(a) $X \setminus (Y \cap Z) = (X \setminus Y) \cap (X \setminus Z)$;
Riešenie: Neplatí, protipríklad $X = \{1\}, Y = \{1\}, Z = \emptyset$.

(b) $X \setminus (Y \cap Z) = (X \setminus Y) \cup (X \setminus Z)$.
Riešenie: Platí, dôkaz:

$$X \setminus (Y \cap Z) = X \cap (Y \cap Z)^c = X \cap (Y^c \cup Z^c) = (X \cap Y^c) \cup (X \cap Z^c) = (X \setminus Y) \cup (X \setminus Z)$$

Určite nestačí, ak ste to vyskúšali na jednom príklade.

(2) Dokážte matematickou indukciou: pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\sum_{i=0}^{n} i.3^i = \frac{(2n-1).3^{n+1}+3}{4}.$$

Pripomínam, že $0 \in \mathbb{N}$.
Riešenie: $P(0):\ 0 = 0$; $P(k) \implies P(k+1)$:

$$\sum_{i=0}^{k+1} i.3^i = \sum_{i=0}^{k} i.3^i + (k+1).3^{k+1} = \frac{(2k-1).3^{k+1}+3}{4} + (k+1).3^{k+1}.$$

Zostáva dokázať pre všetky $k \in \mathbb{N}$ rovnosť

$$\frac{(2k-1).3^{k+1}+3}{4} + (k+1).3^{k+1} = \frac{(2(k+1)-1).3^{(k+1)+1}+3}{4};$$

to sa dá ekvivalentnými úpravami previesť na $0 = 0$. Nebudem to robiť, lebo nie som učiteľ na ZŠ. Alebo možno upraviť ľavú stranu na pravú. To je ťažšie, ale dá sa to bez problémov zvládnuť.

(3) Nech $\rho \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ je daná takto:

$$a \,\rho\, b :\Leftrightarrow a + b \in \mathbb{Q}$$

Zistite, či je ρ reflexívna, symetrická, antisymetrická,tranzitívna.
Riešenie:

(R)

$$(\forall x \in \mathbb{R})\ x + x \in \mathbb{Q}$$

nie je pravdivé, lebo napr. $\pi + \pi = 2\pi \notin \mathbb{Q}$.

(S)

$$(\forall x, y \in \mathbb{R})\ x + y \in \mathbb{Q} \implies y + x \in \mathbb{Q}$$

je pravda, lebo $x + y = y + x$.

(AS)

$$(\forall x, y \in \mathbb{R})(x + y \in \mathbb{Q}) \wedge (y + x \in \mathbb{Q}) \implies x = y$$

nie je pravda, lebo napr. $1 + 2 \in \mathbb{Q}$, $2 + 1 \in \mathbb{Q}$ a $1 \neq 2$.

(T)

$$(\forall x, y, z \in \mathbb{R})(x + y \in \mathbb{Q}) \wedge (y + z \in \mathbb{Q}) \implies (x + z \in \mathbb{Q})$$

nie je pravda, lebo napr.

$$(\sqrt{2} + (-\sqrt{2}) \in \mathbb{Q}) \wedge ((-\sqrt{2}) + \sqrt{2} \in \mathbb{Q}) \wedge (\sqrt{2} + \sqrt{2} \notin \mathbb{Q})$$

(4) Nech $\sim$ je ekvivalencia na množine $\mathbb{R}^2$ daná takto:

$$(a_1, a_2) \sim (b_1, b_2) :\Leftrightarrow a_1 + a_2 = b_1 + b_2$$

Nakreslite, ako vyzerá $\mathbb{R}^2/\sim$ a vyznačte triedy ekvivalencie $[(0,0)]_\sim$, $[(-3,1)]_\sim$.
Riešenie: Rozklad sú všetky priamky v rovine so smernicou -1; hľadané 2 triedy ekvivalencie sú tie z tých priamok, ktoré prechádzajú danými bodmi $(0,0)$ a $(-3,1)$. Obrázok stačil, zdôvodňovať nebolo treba.

(5) Nech $A = \{0,1,2,3,4\}$ a nech

$$P = \{(x_1, x_2) \in A \times A : \text{zvyšok po delení } x_1 + x_2 \text{ číslom 3 je } 1\}.$$

Čiastočné usporiadanie na P je dané takto:

$$(x_1, x_2) \leq (y_1, y_2) :\Leftrightarrow (x_1 \leq y_1) \wedge (x_2 \leq y_2)$$

Nakreslite diagram posetu $(P, \leq)$ a nájdite minimálne, maximálne, najmenšie a najväčšie prvky.
Riešenie: Nechce sa mi to kresliť, väčšina to mala dobre. Minimálne prvky sú $(0,1)$ a $(1,0)$. Maximálne prvky sú $(3,4)$ a $(4,3)$. Najväčší ani najmenší prvok nemá.

V skupine B bol najväčší (a teda jediný maximálny) prvok $(4,4)$. Minimálne prvky boli tri: $(0,2), (1,1)$ a $(2,0)$.