DISKRÉTNA MATEMATIKA A LOGIKA – PRÍKLADY

1. Množiny

Znakom ($*$) sú označené príklady, ktoré sa môžu javiť ako „ťažšie" tesne po príslušnej prednáške. Mali by ste však byť schopní ich zvládnuť s istým časovým odstupom, po diskusii s kolegami alebo s prednášajúcim/cvičiacim a podobne.

(1) ($*$) Nech A, B sú prázdne množiny. Dokážte, že $A = B$. (Musíte použiť definíciu rovnosti množín z prednášky!)

(2) Napíšte množiny
   - (a) $\{1,2,3\} \cup \{3,4,5\}$
   - (b) $\{1,2,3\} \cap \{3,4,5\}$
   - (c) $\{1,2,3\} \cap \{4,5\}$
   - (d) $\{1,2,3\} \cap \emptyset$
   - (e) $\emptyset \cap \emptyset$
   - (f) $\emptyset \cup \{1,2,3\}$
   - (g) $\emptyset \cup \emptyset$
   - (h) $\langle 1,2\rangle \cap \langle \frac{1}{2}, \infty)$ $\longleftarrow$ reálne intervaly.
   - (i) $\langle 1,2\rangle \cap \mathbb{Z}$
   - (j) $\langle 1,2) \cap \mathbb{Z}$
   - (k) $\langle 1,2\rangle \cup \langle \frac{1}{2}, \infty)$
   - (l) $\mathbb{N} \cap \mathbb{R}$
   - (m) $\mathbb{N} \cup \mathbb{R}$.

   Presvedčte sa striktne v zmysle definície $\cup, \cap$, že vaša odpoveď je správna.

(3) Pomocou zápisu typu $\{\ldots : \ldots\}$ zapíšte nasledujúce množiny.
   - (a) Množina všetkých racionálnych čísel, ktorých druhá odmocnina je iracionálna.
   - (b) Množina všetkých spoločných deliteľov čísel 12345 a 543210. (fakt, že n je deliteľom m značíme $n|m$).
   - (c) Množina všetkých podmnožín prirodzených čísel, ktoré obsahujú 3.
   - (d) Množina všetkých komplexných čísel, ktorých absolútna hodnota je 1.
   - (e) Guľu v $\mathbb{R}^3$ s polomerom 1 a stredom $(1,1,1)$.
   - (f) Sféru v $\mathbb{R}^3$ s polomerom 1 a stredom $(1,1,1)$.

(4) Nech A, B sú množiny, nech $A \subseteq B$. Čomu je rovné $A \cup B$? A čomu $A \cap B$? Dokážte, že vaša odpoveď je správna.

(5) Nech A, B sú množiny.
   - (a) $(A \cap B) \cup A = ?$
   - (b) $(A \cup B) \cap A = ?$

   Dokážte, že vaša odpoveď je správna.

(6)
   - (a) $\langle 1,2\rangle \setminus \langle \frac{1}{2}, 3) =?$
   - (b) $\langle \frac{1}{2}, 3) \setminus (1,2\rangle =?$
   - (c) $A \setminus A =?$; A je množina.

(7) $(A \setminus B) \cap (B \setminus A) =?$; A, B sú množiny.

(8) Dokážte alebo vyvráťte nasledujúce množinové rovnosti.

(a) $C \cap (A \setminus B) = (C \setminus A) \setminus (C \setminus B)$
(b) $C \cap (A \setminus B) = (C \setminus B) \setminus (C \setminus A)$
(c) $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \setminus C$
(d) $A = (A \cup B) \cap (A \cup B^C)$
(e) $A = (A \cap B) \cup (A \cap B^C)$

(9) Nech A, B sú konečné množiny. Nech A má n prvkov (značíme $|A| = n$) a nech $|B| = m$.
(a) Aké sú všetky možné hodnoty $|A \cup B|$?
(b) Aké sú všetky možné hodnoty $|A \cap B|$?
(c) Ako sa zmení odpoveď na (a), ak navyše predpokladáme, že $A \cap B = \emptyset$?
(d) Ako sa zmení odpoveď na (b), ak navyše predpokladáme, že $|A \cup B| = 5$?
(e) Pre každé dve konečné množiny A, B je štvorica čísel $|A|, |B|, |A \cap B|, |A \cup B|$ v istom peknom vzťahu. Objavte tento vzťah a dokážte ho.

(10) Napíšte všetky podmnožiny množiny $\{1, 2, 3\}$. Nájdite také $A, B \subseteq \{1, 2, 3\}$, že neplatí ani $A \subseteq B$, ani $B \subseteq A$.

(11) Koľko je všetkých podmnožín n-prvkovej množiny?

(12) Nech A je konečná množina, nech B je množina, nech f je zobrazenie $f : A \to B$.
(a) Aký je vzťah medzi $|A|$ a $|f(A)|$?
(b) Čo môžeme usúdiť o zobrazení f, z predpokladu $|A| = |f(A)|$?

(13) Nech A je konečná množina, nech $f : A \to A$. Dokážte, že f je surjektívne práve vtedy, keď f je injektívne.

(14) Zistite, či platí:

(a)	$\{1\} \in \{1, 2\}$	(f)	$1 \subseteq \{1, 2\}$	(k)	$\emptyset \subseteq \{1, 2\}$
(b)	$\{1\} \subseteq \{1, 2\}$	(g)	$\{1\} \in \{\{1\}, 2\}$	(l)	$\emptyset \subseteq \emptyset$
(c)	$\{1, 2\} \in \{1, 2\}$	(h)	$\{1\} \subseteq \{\{1\}, 2\}$	(m)	$\emptyset \in \emptyset$
(d)	$\{1, 2\} \subseteq \{1, 2\}$	(i)	$\{2\} \subseteq \{\{1\}, 2\}$		
(e)	$1 \in \{1, 2\}$	(j)	$\emptyset \in \{1, 2\}$		

Svoje odpovede zdôvodnite. Nájdite študenta, ktorý má na niektoré z (a)-(m) iný názor a pohádajte sa s ním o tom.

(15) Nájdite (v univerze $\mathbb{R}$):
(a) $\langle 1, 2\rangle^C$
(b) $(1, 2)^C$
(c) $\mathbb{R}^C$
(d) $\emptyset^C$

(16) Vypočítajte:
(a) $\{1, 2\} \times \{1, 3\}$
(b) $\{1, 3\} \times \{1, 2\}$
(c) $(\{1, 2\} \times \{1, 3\}) \cap (\{1, 3\} \times \{1, 2\})$

(17) Vypočítajte $(\{1, 2\} \times \{1, 3\}) \cup (\{1, 3\} \times \{1, 2\})$. Je táto množina kartézskym súčinom nejakých dvoch množín? Prečo?

(18) ($*$) Nech A, B sú konečné množiny také, že $|A \times B|$ je prvočíslo. Čo viete z toho usúdiť o množinách A, B? Môže sa stať, že $A = B$? Prečo?

(19) Dokážte alebo vyvráťte: pre všetky množiny A, B, C platí:
(a) $A \cap (B \times C) = (A \cap B) \times (A \cap C)$;
(b) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$;
(c) $A \cup (B \times C) = (A \cup B) \times (A \cup C)$;

(d) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$.

(20) Nech A je množina, nech $f : A \to A$. Dokážte alebo vyvráťte: pre všetky $X, Y \subseteq A$ platí:
(a) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$;
(b) $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.