DISKRÉTNA MATEMATIKA A LOGIKA – PRÍKLADY

Znakom $(*)$ sú označené príklady, ktoré sa môžu javiť ako „ťažšie" tesne po príslušnej prednáške. Mali by ste však byť schopní ich zvládnuť s istým časovým odstupom, po diskusii s kolegami alebo s prednášajúcim/cvičiacim a podobne.

(1) Nájdite zápisy permutácií f, g ako súčinov cyklov. Vynásobte ich v tvare súčinu cyklov $(f.g)$ a výsledok preveďte späť do "pôvodného"tvaru. [1]

(a) $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 7 & 8 & 5 & 3 & 6 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

(b) $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 2 & 1 & 6 & 4 & 5 & 8 & 7 \end{pmatrix}$

Odpoveď:$f = (127)(3845)$, $g = (13)(465)(78)$,

$f.g = (18)(27463) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 7 & 2 & 6 & 5 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

(2) (a) Vymenujte prvky podgrupy $H = \{(1234)^n : n \in \mathbb{N}\}$ grupy S_4 a nakreslite jej Cayleyho tabuľku. Je H abelovská? Je S_4 abelovská?

(b) Vypočítajte $(1234)^5$, $(1234)^{-2}$, $(1234)^{99}$, $(1234)^{-15}$.

(c) Napíšte pravé kosety $H.()$, $H.(1234)$, $H.(23)$, $H.(24)$ v grupe S_4.

(d) Koľko je všetkých pravých kosetov v rozklade $\{H.x : x \in S_4\}$?

(e) Nájdite dvojprvkovú podgrupu grupy S_4.

(f) Nájdite trojprvkovú podgrupu grupy S_4. (pomôcka: podobne ako H)

(g) Nájdite dve šesťprvkové podgrupu grupy S_4 (pomôcka: koľko prvkov má S_n?).

(h) Nájdite sedemprvkovú podgrupy grupy S_4 (pomôcka: Lagrangeova veta).

(i) Nájdite najmenšiu (v zmysle $\subseteq$) podgrupu S_4, ktorá obsahuje prvky (12) a (34). Nakreslite jej Cayleyho tabuľku. $(*)$ Je izomorfná s H? Prečo?

(j) Nájdite všetky podgrupy grupy H (sú tri). Pre každú podgrupu S grupy H napíšte rozklad H na pravé kosety podľa S.

(3) Koľko podgrúp má ľubovoľná 23-prvková grupa? [dve] Prečo? (pomôcka: Lagrangeova veta)

(4) Existuje konečná grupa s $2n$ prvkami, ktorá má $n + 1$ prvkovú podgrupu? [áno (?!)]

(5) $(*)$ Nech G je grupa s $2n$ prvkami, ktorá má $n - 1$ prvkovú podgrupu. Čo z toho vyplýva pre n? [n=2 alebo n=3]

(6) Dokážte, že všetky 8-bitové reťazce vybavené operáciou XOR tvoria grupu. Asociativita je najťažšia, urobte ju iba pre 1-bitové reťazce, pomocou logickej tabuľky. Presvedčte sa, že tie prvky, ktoré majú prvé dva bity nulové tvoria podgrupu. Ako vyzerajú zodpovedajúce pravé kosety? Koľko ich je? [4]

[1] Ja som sa pomýlil iba dva razy. Je to dosť náchylné na chyby, ale väčšinou sa chyba prejaví tak, že vbehnete „doprostred" už hotového cyklu. Na písomke iste nebudú takéto zložité permutácie, nebojte sa.

(7) Nájdite nejakú 1024-prvkovú grupu (pomôcka: viď predošlé cvičenie).
(8) Ako vyzerá rozklad grupy $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, .)$ na pravé kosety
   (a) podľa podgrupy $\mathbb{R}^+$? $[\{\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^-\}]$
   (b) podľa podgrupy $\{-1, 1\}$?
   (c) podľa podgrupy $\{1\}$?
   (d) podľa podgrupy $\mathbb{R} \setminus \{0\}$?
(9) Taký istý príklad ako predošlý, ale vezmite ako „veľkú" grupu $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, .)$ namiesto $(\mathbb{R} \setminus \{0\})$. Nakreslite tie rozklady, ak to rozumne ide, pre $\{-1, 1\}$ to vyzerá divoko.