Nech x je <u>najmenšie</u> <u>celé</u> <u>číslo</u> patriace do H.

Potom aj $k.x = \underbrace{x + \ldots + x}_{k\text{-krát}}$ patrí do H, pre $\forall k \in N \setminus \{0\}$

Pretože H je podgrupa $(Z,+)$ a $k.x \in H$, pre $\forall k \in N \setminus \{0\}$, $x \in Z$,
teda platí, že $\underline{k.Z \subseteq H.}$

ak ukážeme, že $H \subseteq k.Z$, tak potom bude platiť: $H = k.Z$, $k.Z = \{k.x : x \in Z\}$

<u>Ukážme teda, že $H \subseteq k.Z$:</u>

nech s je ľubovoľný kladný prvok v H, ukážeme, že $s \in k.Z$
(to nám stačí)

Ďalej, vieme, že $s = q.x + r$, pre jednoznačne určené q, r,
pričom $0 \leq r < x$

z toho pre r platí: $r = s - q.x \in H$

Keby $r > 0$, tak by r bolo kladné číslo v H, menšie ako najmenší kladný prvok v H - to je ale nemožné, t.j. nastal by SPOR!

preto $\underbrace{r = 0, \text{ a teda } s = q.x \text{ t.j. } s \in k.Z}$

Tým sme ukázali, že aj $\underline{H \subseteq k.Z}$

a teda vcelku platí: $H = k.Z$, $k.Z = \{k.x : x \in Z\}$, $k \in N$

POZN.: v dôkaze som nevyužil vlastnosti podgrupy, teda, že:

$$\left.\begin{array}{l} \forall x, y \in H : x.y \in H \\ \forall x \in H : \underset{v\,G}{x^{-1}} \in H \end{array}\right\} \Rightarrow H \subseteq G$$