1. Rovnice prvého rádu

Riešte rovnicu

1. $x' = x^2, \quad x(0) = 1.$
2. $x' = x(1-x) - \frac{3}{16}, \quad x(0) = \frac{1}{2}.$
3. $x' = \frac{1+x^2}{1+t^2}, \quad x(0) = x_0.$
4. Látky A,B,C spolu reagujú a vzniká látka D. Napíšte rovnicu, ak do reakcie vstupujú v rovnakom pomere. Riešte.

2. Piccardove aproximácie

Vypočítajte prvé tri Piccardove aproximácie. (Odhadnite interval konvergencie, ak sa dá.)

1. $x' = x^2 - 3t^2 - 1, \qquad x(0) = 1$
2. $x' = t - x^2, \qquad x(0) = 0$
3. $x' = xt^2 + 1, \qquad x(0) = 1$
4. $x' = x^2 + t, \qquad x(0) = 1$

3. Riešenie rovníc pomocou mocninných radov

Riešte v okolí regulárneho bodu t_0. Určte interval konvergencie.

1. $(t^2+4)x'' + 2tx' - 12x = 0,\ t_0 = 0.$
2. $(t^2+4)x'' + 6tx' + 4x = 0,\ t_0 = 0.$
3. $(t^2-t+1)x'' + (4t-2)x' + 2x = 0,\ t_0 = 0.$
4. $x'' - 2(t+3)x' - 3x = 0,\ t_0 = -3.$
5. $x'' - 2(t+3)x' - 3x = 0,\ t_0 = 0.$
6. $x'' - 2(t+3)x' - 3x = sint,\ t_0 = 0.$

Riešte v okolí singulárneho bodu $t_0 = 0$. Určte interval konvergencie.

1. $2t(t+1)x'' + 3(t+1)x' - x = 0.$
2. $4t^2x'' + 4tx' + (4t^2-1)x = 0.$
3. $2tx'' + 5(1-2t)x' - 5x = 0.$
4. $(4-t)tx'' + (2-t)x' + 4x = 0.$
5. $2t^2x'' + t(4t-1)x' + 2(3t-1)x = 0.$
6. $2t(t+1)x'' + 3(t+1)x' - x = 0.$

4. Kvalitatívna analýza lineárnych systémov

Nakreslite fázový portrét lineárneho systému

1.
$$x' = -x + 8y$$
$$y' = x + y$$

2.
$$x' = x - 3y$$
$$y' = 3x + y$$

3.
$$x' = 3x - y$$
$$y' = 4x - y$$

4. Je daný fázový portrét lineárneho systému (obrázkom). Nájdite príklad takého systému.
5. Uvažujme Richardsonov model zbrojenia, kde x je výška výdavkov štátu A, y výška výdavkov štátu B; r , s sú dané konštanty. Systém má tvar

$$\begin{aligned} x' &= -2x + 4y + r \\ y' &= 4x - 2y + s \end{aligned}$$

Načrtnite fázový portrét. Vyznačte oblasť odzbrojenia oblasť kontrolovaného a oblasť nekontrolovaného zbrojenia.

5. Kvalitatíivna analýza nelineárnych systémov

Rozhodnite, ktoré zo zadaných rovníc sú kvalitatívne ekvivalentné.

Vyšetrite stabilitu a druh pevných bodov nelineárneho systému, kde sa dá načrtnite fázov y portrét.

1
$$\begin{aligned} x' &= (2 - x - 2y)x \\ y' &= (2 - 2x - y)y \end{aligned}$$

2
$$\begin{aligned} x' &= (1 - x - y)x \\ y' &= (a - 4a^2x - y)y \end{aligned}$$

vzhľadom na parameter a. Špeciálne pre $a = 1/4$ a $a = 1$

3
$$\begin{aligned} x' &= (1 - ax - y)x \\ y' &= -(1 - x + ay)y \end{aligned}$$

vzhľadom na parameter $a \in [0, 1]$.

4
$$\begin{aligned} x' &= y^2 - 3x + 2 \\ y' &= x^2 - y^2 \end{aligned}$$

5
$$\begin{aligned} x' &= -3y + xy - 4 \\ y' &= x^2 - y^2 \end{aligned}$$

6
$$\begin{aligned} x' &= -x + xy \\ y' &= -y + \alpha(x^2 - y^2) \end{aligned}$$

vzhľadom na parameter $\alpha \geq 0$.
Nájdite prvé integrály nasleduj ucich systémov a načrtnite fázový portrét

7
$$\begin{aligned} x' &= y \\ y' &= x^2 + 1 \end{aligned}$$

8
$$x' = xy$$
$$y' = \ln x \quad x > 1$$

9
$$x' = y$$
$$y' = -x + \alpha x^2 \quad \alpha > 0$$

10 $\quad x' = y$

$y' = -x^3 + 2x^2 - x + \alpha y \quad \alpha \geq 0 \quad$ (1.integrál existuje len pre $\alpha = 0$)

11. Dynamo je modelované systémom diferenciálnych rovníc

$$x' = -\mu x + xy$$
$$y' = 1 - \nu y - x^2$$

Nájdite pevné body a zistite ich typ vzhľadom na parametre μ, ν. Načrtnite lokálny fázový portrét.

5. Lineárne diferenčné rovnice

Nájdite riešenie rovnice

1. $x(n+1) - (n+1)x(n) = 0 \quad x(0) = 1$
2. $x(n+1) - 3^n x(n) = 0$
3. $x(n+1) - \frac{n}{n+1} x(n) = 2 \quad x(0) = 1$
4. $x(n+1) - x(n) = e^n \quad x(0) = 2$
5. $x(n+1) - (n+1)x(n) = 3^n (n+1)! \quad x(0) = c$
6. Pôžička 80 000 je splácaná rovnakými mesačnými splátkami. Ak ročný úrok je 10 percent stanovte výšku splátky tak, aby bola pôžička splaten v období10 rokov.
7. Predpokladajme, že ponuka a dopyt sú dané vzťahmi

$$D(n) = -ac(n) + 3,$$

$$P(n+1) = c^2(n) + 1.$$

Napíšte diferenčnú rovnicu pre trhovú cenu $c(n)$ [predpoklad:ponuka=dopyt]. Nájdite pevný bod c^*, vyšetrite pre aké hodnoty parametra a je stabilný. Znázornite schodovitý diagram pre $a = -2$, $c_0 = 0.5$.

8. Predpokladajme, že ponuka a dopyt sú dané vzťahmi

$$D(n) = -ac(n) + 3,$$

$$P(n+1) = c^2(n) + 1.$$

Napíšte diferenčnú rovnicu pre trhovú cenu $c(n)$ [predpoklad:ponuka=dopyt]. Vyšetrite pre aké hodnoty parametra a existuje v rovnici stabilný 2-cyklus.

5. Kódovaná správa je prenášaná pomocou k znakových reťazcov. Časová dĺžka potrebná na vyslanie jednotlivých znakov je $t_1 =$, ...$t_k =$. Napíšte diferenčnú rovnicu pre $M(n)$ počet slov dĺžky n a vyriešte ju.

Vypočítajte kapacitu kanála.
(Napr. pre $k = 2$, $t_1 = 1$, $t_2 = 2$.)

Nájdite riešenie rovnice

1. $x(n+2) - 16x(n) = 2^n$
2. $x(n+2) - 16x(n) = 4^n$
3. $x(n+2) + 16x(n) = 4^n$
4. $x(n+2) - 6x(n+1) + 14x(n) = n$
5. $x(n+2) - 6x(n+1) + 9x(n) = 3^n$

5. Systémy lineárnych diferenčných rovníc

1. Systém má tri stavy s_1, s_2 a s_3. Prechod do stavu s_{i+1} má pravdepodobnosť $\frac{1}{3}$, do stavu s_{i-1} má pravdepodobnosť $\frac{1}{2}$. Napíšte sústavu diferenčných rovníc pre pravdepodobnosť výskytu v stave s_i po n krokoch. Vyriešte ju a vypočítajte limitné pravdepodobnosti pre $n \to \infty$.

2. Systém má štyri stavy s_1, s_2, s_3 a s_4. Každý stav zodpovedá jednej miestnosti na obrázku. Prechod z miestnosti s_i ľubovoľnými dverami a zotrvanie v miestnosti sú rovnako pravdepodobné Napíšte sústavu diferenčných rovníc pre pravdepodobnosť výskytu v stave s_i po n krokoch. Vypočítajte limitné pravdepodobnosti pre $n \to \infty$.