DISKRÉTNA MATEMATIKA A LOGIKA – PRÍKLADY

Znakom ($*$) sú označené príklady, ktoré sa môžu javiť ako „ťažšie” tesne po príslušnej prednáške. Mali by ste však byť schopní ich zvládnuť s istým časovým odstupom, po diskusii s kolegami alebo s prednášajúcim/cvičiacim a podobne.

2. Relácie

(1) Nech M je množina všetkých študentov tohto predmetu. Nech ρ je relácia na množine M definovaná takto:

$$x\rho y :\Longleftrightarrow \ x \text{ a } y \text{ majú aspoň jedno písmeno v mene spoločné.}$$

Zistite, či ρ je reflexívna, symetrická, antisymetrická, tranzitívna.

(2) Nech P je množina všetkých priamok v rovine. Zistite, či kolmosť priamok ($\perp$) je reflexívna, symetrická, antisymetrická, tranzitívna relácia.

(3) Nech P je množina všetkých priamok v rovine. Zistite, či rovnobežnosť priamok ($\|$) je reflexívna, symetrická, antisymetrická, tranzitívna relácia.

(4) Nech $\sim_{\mathbb{Q}}$ je relácia na $\mathbb{R}$ daná predpisom

$$a \sim_{\mathbb{Q}} b :\Longleftrightarrow a - b \in \mathbb{Q}.$$

Zistite, či $\sim_{\mathbb{Q}}$ je reflexívna, symetrická, antisymetrická, tranzitívna relácia. Aké vlastnosti $\mathbb{Q}$ ste použili? Nájdite nejakú inú množinu $A \subseteq \mathbb{R}$ ako $\mathbb{Q}$ pre ktorú dostaneme rovnaké vlastnosti (R,S,T) analogicky definovanej relácie $\sim_A$.

(5) Nech $2^{\mathbb{N}}$ je množina všetkých podmnožín N. Uvažujme takéto relácie Θ_i na $2^{\mathbb{N}}$:
- (a) $A\Theta_1 B$ práve vtedy, keď $A \cap B = \emptyset$,
- (b) $A\Theta_2 B$ práve vtedy, keď $A \cap B \neq \emptyset$,
- (c) $A\Theta_3 B$ práve vtedy, keď $A \cup B$ je nekonečná.
- (d) $A\Theta_4 B$ práve vtedy, keď $A \cap B$ je konečná.
- (e) $A\Theta_5 B$ práve vtedy, keď $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ je konečná.
- (f) $A\Theta_6 B$ práve vtedy, keď $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ obsahuje iba párne čísla.

O každej z týchto relácií dokážte alebo vyvráťte každú z vlastností reflexívnosť, symetrickosť, antisymetrickosť, tranzitivita.

(6) Dokážte, že relácia ρ na nejakej množine A je symetrická práve vtedy, keď $\rho = \rho^{-1}$, pričom

$$\rho^{-1} = \{(y, x) : (x, y) \in \rho\}.$$

(7) Dokážte, že relácia ρ na nejakej množine A je reflexívna práve vtedy, keď $\mathrm{id}_A \subseteq \rho$, pričom [1]

$$\mathrm{id}_A = \{(x, x) : x \in A\}.$$

[1] Toto a aj predošlé cvičenie je „ľahko vidno”, samozrejme, ale ide o to, aby ste si ten dôkaz čo najporiadnejšie napísali.

(8) (∗) Nech A je množina. Keďže $\emptyset$ je podmnožina $A \times A$, $\emptyset$ je relácia na A. Zistite, či $\emptyset$ je reflexívna, symetrická, antisymetrická, tranzitívna relácia na A.

(9) (∗) Nech A, B sú nejaké dve rôzne množiny, nech Θ je podmnožinou $A \times A$ aj $B \times B$. Potom Θ je zrejme zároveň reláciou na A aj na B. Ktoré z nasledujúcich tvrdení sú za týchto prepokladov pravdivé a ktoré nie?
   (a) Ak Θ je reflexívna relácia na A, potom Θ je reflexívna relácia na B.
   (b) Ak Θ je symetrická relácia na A, potom Θ je symetrická relácia na B.
   (c) Ak Θ je tranzitívna relácia na A, potom Θ je tranzitívna relácia na B.

(10) Pre každý riadok tabuľky zostrojte reláciu s danými vlastnosťami na množine $A = \{1, 2, 3, 4\}$.

reflexívna	**symetrická**	**tranzitívna**
áno	áno	áno
áno	nie	áno
áno	áno	nie
nie	áno	áno
nie	nie	áno
nie	nie	nie

3. Ekvivalencie a rozklady

(1) Nech $\sim$ je relácia na $\mathbb{R}$ daná predpisom

$$x \sim y :\Longleftrightarrow sin(x) = sin(y).$$

Dokážte, že $\sim$ je ekvivalencia a napíšte dve rôzne triedy ekvivalencie $\sim$.

(2) Nech O je fixný bod v rovine. Nech $\sim$ je relácia ekvivalencie na všetkých bodoch v rovine daná predpisom

$$A \sim B :\Longleftrightarrow \text{ úsečky } AO \text{ a } BO \text{ sú rovnako dlhé.}$$

Načrtnite triedu ekvivalencie nejakého bodu $C \neq O$.

(3) (∗) Nech $A = \mathbb{R}^2$ Definujme na A [2] reláciu $\sim$ takto:

$$\mathbf{x} \sim \mathbf{y} :\Longleftrightarrow \text{ existuje } \alpha \in \mathbb{R},\ \alpha \neq 0 \text{ také, že } \mathbf{x} = \alpha\mathbf{y}$$

Dokážte, že $\sim$ je ekvivalencia. Ako vyzerá príslušný rozklad $\mathbb{R}^2$? Nakreslite ho.

(4) Nech $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Uvažujme rozklad $\{\{1, 2, 3\}, \{4, 5\}, \{6\}\}$. Nájdite ekvivalenciu prislúchajúcu tomuto rozkladu.

(5) Nájdite všetky ekvivalencie na množine $\{1, 2, 3\}$.

(6) (∗) Koľko je všetkých ekvivalencií na n-prvkovej množine?

(7) Nech $\mathbb{M}_n$ je množina všetkých reálnych regulárnych štvorcových matíc $n \times n$. Definujme na $\mathbb{M}_n$ reláciu (nazývanú *podobnosť*) matíc takto:

$$A \sim B :\Longleftrightarrow \text{ existuje regulárna matica } P \text{ taká, že } A = PBP^{-1}$$

Dokážte, že $\sim$ je ekvivalencia. [3]

(8) Dokážte, že $\sim \subseteq (0, \infty) \times (0, \infty)$ daná predpisom

$$a \sim b :\Longleftrightarrow \frac{a^2}{b^2} \in \mathbb{Q}$$

---

[2] Uvedomte si, že $\sim \subseteq \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$, teda $\sim$ je relácia na množine dvojíc reálnych čísel.

[3] Pomôcka: $(PQ)^{-1} = Q^{-1}P^{-1}$

je ekvivalencia. Charakterizujte prvky patriace do $[\sqrt{2}]_\sim$. Nájdite tri prvky patriace do $[\pi]_\sim$.