Priezvisko: .... **Meno:** ....

1.	2.	3.	4.	5.	Σ	Sem.	$\Sigma\Sigma$	Známka

(1) Nech A je množina.

(a) Definujte ekvivalenciu na množine A.

(b) Definujte rozklad množiny A.

(c) Napíšte 2 vety, ktoré vyjadrujú súvislosť medzi ekvivalenciami na množine A a rozkladmi množiny A.

(d) Nech Θ_1, Θ_2 sú ekvivalencie na množine A a nech platí $\Theta_1 \subseteq \Theta_2$. V akom vzťahu sú rozklady $A/\Theta_1, A/\Theta_2$? Nemusíte dokazovať, stačí korektná matematická formulácia toho vzťahu.

Môže byť ľubovoňé z nasledujúcich:

- *Pre každé $X \in A/\Theta_1$ existuje $Y \in A/\Theta_2$ také, že $X \subseteq Y$.*
- *Pre každé $Y \in A/\Theta_2$ existuje $X \in A/\Theta_1$ také, že $X \subseteq Y$.*
- *Každý prvok A/Θ_2 je zjednotením niektorých prvkov z A/Θ_1.*

Sú možné aj iné správne odpovede. Nesprávna odpoveď je $A/\Theta_1 \subseteq A/\Theta_2$.

(e) Nech $\mathrm{Part}(A)$ je množina všetkých rozkladov množiny A. Vymenujte všetky prvky množiny $\mathrm{Part}(\{1,2,3,4\})$, ktoré majú 3 prvky. Je ich 10.

Bolo ich 6, snáď táto moja neodpustiteľná chyba nespôsobila vážne problémy. Pôvodne som chcel dať 2, nie 3. Potom by 10 sedelo.

(f) Nakreslite diagram posetu $\mathrm{Part}(\{1,2,3\})$ v usporiadaní $\leq$, ktoré je dané predpisom

$$A/\Theta_1 \leq A/\Theta_2 :\Longleftrightarrow \Theta_1 \subseteq \Theta_2.$$

Nemusíte dokazovať, že $(\mathrm{Part}(\{1,2,3\}), \leq)$ je poset.

Je to diamant.

(2) (a) Napíšte 2 vety, ktoré vyjadrujú vzťah medzi kongruenciami na grupe a normálnymi podgrupami.

(b) Dokážte, že ak je nejaká grupa abelovská, potom každá jej podgrupa je normálna.

(c) Uvažujme grupu $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, +)$, kde operácia $+$ na $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ je daná predpisom

$$(a_1, a_2) + (b_1, b_2) := (a_1 + b_1, a_2 + b_2).$$

Nemusíte dokazovať, že $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, +)$ je grupa. Nech H je podmnožina $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ daná takto:

$$H := \{(x_1, x_2) : x_1 + x_2 \in \mathbb{Z}\}.$$

(i) Nakreslite H.
Priamky so smernicou -1, pokrývajúce $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

(ii) Napíšte, čo je jednotkový prvok grupy $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, +)$ a ako vyzerá inverzný prvok k danému prvku (a_1, a_2) tejto grupy.
$(0, 0)$ *a* $(-a_1, -a_2)$.

(iii) Dokážte, že relácia $\sim$ na $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ daná predpisom

$$(u_1, u_2) \sim (v_1, v_2) \iff (u_1 - v_1, u_2 - v_2) \in H$$

je kongruencia na grupe $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, +)$.
Zrejme $\sim = \sim_H$, *stačí dokázať, že H je normálna podgrupa. Normalitu netreba, lebo* $(\mathbb{R}\times\mathbb{R}, +)$ *je abelovská. Takže stačí dokázať, že H je podgrupa (3-4 riadky). Samozrejme, dá sa dokázať aj priamo, že $\sim$ je kongruencia. Len s tým je veľa roboty.*

(3) (a) Dokážte, že pre všetky prvky a, b každého zväzu platí implikácia

$$a \vee b = a \wedge b \Longrightarrow a = b.$$

Dôkaz používajúci diagramy neakceptujem. Pre seba si kreslite čo len chcete, ale finálny dôkaz musí byť neobrázkový.
2 možnosti:

(i) $a \leq a \vee b = a \wedge b \leq b \leq a \vee b = a \wedge b \leq a$. *Teda* $a \leq b$ *a zároveň* $b \leq a$. *Teda* $a = b$.

(ii) *Keďže* $a \vee b = a \wedge b$, $a \wedge (a \vee b) = a \wedge a \wedge b$. *Podľa zákona absorpcie,* $a \wedge (a \vee b) = a$. *Podľa idempotentnosti* $\wedge$, $a \wedge a \wedge b = a \wedge b$. *Teda* $a = a \wedge b$. *Podobne* $b = a \wedge b$, *teda* $a = b$.

Nekorektný dôkaz, ktorý sa často vyskytoval bol takýto: Analyzujme „po prípadoch". Ak $a \leq b$, *potom* $a = a \wedge b$. *Keďže* $a \wedge b = a \vee b$, $a = a \vee b$. *Teda* $b \leq a$ *a keďže* $a \leq b$, $a = b$. *Podobne ste dokázali, že ak* $b \leq a$, *potom* $a = b$.

Lenže to nie je správny dôkaz, dokázali ste totiž platnosť implikácie iba pre porovnateľné dvojice a, b. Nie pre všetky dvojice.

(b) Nakreslite diagramy (až na izomorfizmus) všetkých zväzov, ktoré majú 5 prvkov. Napíšte, ktoré z nich sú (resp. nie sú) distributívne a ktoré modulárne a prečo.
Pentagon, diamant, reťazec, šarkan a šarkan v Austrálii.

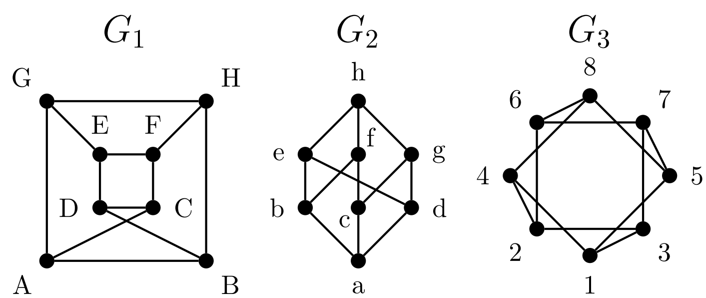
(c) Nakreslite 3 kópie diagramu pentagonu a na každej z nich vyznačte rozklad zodpovedajúci nejakej kongruencii. Samozrejme, každá kongruencia musí byť iná.
Tuto bolo rozšírené tipovanie bez akejkoľvek snahy rozmýšľať. Hodnotilo sa 0 bodmi.

(4) (a) Nakreslite diagram nejakého distributívneho zväzu L so 6 prvkami, ktorý nie je reťazcom. Nazvite jeho prvky na diagrame písmenami z množiny $\{o, a, b, c, d, i\}$, o je najmenší prvok a i najväčší. Ostatné nazvite písmenami z množiny $\{a, b, c, d\}$ ako chcete, ale v ďalšom už používajte Vami zvolené označenie.

(b) Nakreslite diagram posetu $J(L)$.

(c) Nájdite kanonickú reprezentáciu L ako zväzu množín $(H(J(L)), \cap, \cup)$. Nakreslite vedľa seba diagramy L a $H(J(L))$ a šípkami naznačte izomorfizmus $L \to H(J(L))$.
Povedal som, že bude a aj bolo. Aj tak to mali niektorí zle.

(5) (a) Pre každé dva z nasledujúcich grafov vyšetrite, či sú izomorfné. Ak sú izomorfné, zostrojte zložku izomorfizmu týkajúcu sa vrcholov. Ak nie sú, dokážte, že izomorfizmus neexistuje.



G_1 nie je izomorfný s G_2, lebo G_1 obsahuje uzavretý ťah dĺžky 5 a G_2 nie. $G_2 \simeq G_3$, nebol problém. Keďže $G_1 \not\simeq G_2 \simeq G_3$, $G_1 \not\simeq G_3$.

(b) Nájdite 2 automorfizmy grafu G_2.
Nerozumiem, prečo ste nebrali triviálny identický automorfizmus. Automorfizmus je zobrazenie a nie 2 obrázky vedľa

seba. Rozumné bolo prekresliť si najprv G_2 *symetrickejšie, ako kocku.*

(c) Nájdite kostru grafu G_1 z predošlého príkladu prehľadávaním do šírky. Poradie vrcholov je abecedné. Dokumentujte dostatočne aj výpočet algoritmu napríklad tak, ako sme to robili na prednáške. Teda nestačí iba nakresliť kostru.
Vo finále ste často nedali hranu GE*, ale* DE*.*