Priezvisko: .... **Meno:** ....

1.	2.	3.	4.	5.	Σ	Sem.	$\Sigma\Sigma$	Známka

(1) Nech A je množina.
   (a) Definujte ekvivalenciu na množine A.
   (b) Definujte rozklad množiny A.
   (c) Napíšte 2 vety, ktoré vyjadrujú súvislosť medzi ekvivalenciami na množine A a rozkladmi množiny A.
   (d) Nech Θ_1, Θ_2 sú ekvivalencie na množine A a nech platí $\Theta_1 \subseteq \Theta_2$. V akom vzťahu sú rozklady $A/\Theta_1, A/\Theta_2$? Nemusíte dokazovať, stačí korektná matematická formulácia toho vzťahu.
   (e) Nech $\mathrm{Part}(A)$ je množina všetkých rozkladov množiny A. Vymenujte všetky prvky množiny $\mathrm{Part}(\{1,2,3,4\})$, ktoré majú 3 prvky. Je ich 10.
   (f) Nakreslite diagram posetu $\mathrm{Part}(\{1,2,3\})$ v usporiadaní $\leq$, ktoré je dané predpisom

$$A/\Theta_1 \leq A/\Theta_2 :\Longleftrightarrow \Theta_1 \subseteq \Theta_2.$$

   Nemusíte dokazovať, že $(\mathrm{Part}(\{1,2,3\}), \leq)$ je poset.

(2) (a) Napíšte 2 vety, ktoré vyjadrujú vzťah medzi kongruenciami na grupe a normálnymi podgrupami.
   (b) Dokážte, že ak je nejaká grupa abelovská, potom každá jej podgrupa je normálna.
   (c) Uvažujme grupu $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, +)$, kde operácia $+$ na $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ je daná predpisom

$$(a_1, a_2) + (b_1, b_2) := (a_1 + b_1, a_2 + b_2).$$

   Nemusíte dokazovať, že $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, +)$ je grupa. Nech H je podmnožina $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ daná takto:

$$H := \{(x_1, x_2) : x_1 + x_2 \in \mathbb{Z}\}.$$

      (i) Nakreslite H.
      (ii) Napíšte, čo je jednotkový prvok grupy $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, +)$ a ako vyzerá inverzný prvok k danému prvku (a_1, a_2) tejto grupy.
      (iii) Dokážte, že relácia $\sim$ na $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ daná predpisom

$$(u_1, u_2) \sim (v_1, v_2) \iff (u_1 - v_1, u_2 - v_2) \in H$$

je kongruencia na grupe $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, +)$.

(3) (a) Dokážte, že pre všetky prvky a, b každého zväzu platí implikácia

$$a \vee b = a \wedge b \Longrightarrow a = b.$$

Dôkaz používajúci diagramy neakceptujem. Pre seba si kreslite čo len chcete, ale finálny dôkaz musí byť neobrázkový.

(b) Nakreslite diagramy (až na izomorfizmus) všetkých zväzov, ktoré majú 5 prvkov. Napíšte, ktoré z nich sú (resp. nie sú) distributívne a ktoré modulárne a prečo.

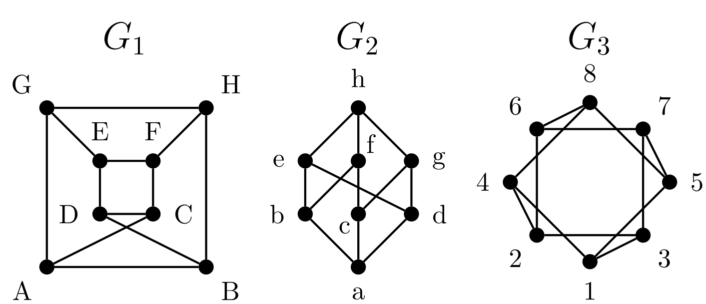
(c) Nakreslite 3 kópie diagramu pentagonu a na každej z nich vyznačte rozklad zodpovedajúci nejakej kongruencii. Samozrejme, každá kongruencia musí byť iná.

(4) (a) Nakreslite diagram nejakého distributívneho zväzu L so 6 prvkami, ktorý nie je reťazcom. Nazvite jeho prvky na diagrame písmenami z množiny $\{o, a, b, c, d, i\}$, o je najmenší prvok a i najväčší. Ostatné nazvite písmenami z množiny $\{a, b, c, d\}$ ako chcete, ale v ďalšom už používajte Vami zvolené označenie.

(b) Nakreslite diagram posetu $J(L)$.

(c) Nájdite kanonickú reprezentáciu L ako zväzu množín $(H(J(L)), \cap, \cup)$. Nakreslite vedľa seba diagramy L a $H(J(L))$ a šípkami naznačte izomorfizmus $L \to H(J(L))$.

(5) (a) Pre každé dva z nasledujúcich grafov vyšetrite, či sú izomorfné. Ak sú izomorfné, zostrojte zložku izomorfizmu týkajúcu sa vrcholov. Ak nie sú, dokážte, že izomorfizmus neexistuje.



(b) Nájdite 2 automorfizmy grafu G_2.

(c) Nájdite kostru grafu G_1 z predošlého príkladu prehľadávaním do šírky. Poradie vrcholov je abecedné. Dokumentujte dostatočne aj výpočet algoritmu napríklad tak, ako sme to robili na prednáške. Teda nestačí iba nakresliť kostru.