(1) Dokážte alebo vyvráťte: pre všetky množiny X, Y, Z platí

(a) $(X \cup Y) \setminus (Y \cup Z) = (X \setminus Z) \setminus Y$;

(b) $(X \cup Y) \setminus (Y \cap Z) = X \setminus (Z \setminus Y)$.

Ak rovnosť platí, dokážte ju pomocou rovností na ťaháku. Ak neplatí, nájdite protipríklad.

Dôkaz, že prvá rovnosť platí:

$$(X \cup Y) \setminus (Y \cup Z) = (X \cup Y) \cap (Y \cup Z)^C =$$
$$(X \cup Y) \cap Y^C \cap Z^C = ((X \cap Y^C) \cup (Y \cap Y^C)) \cap Z^C =$$
$$((X \cap Y^C) \cup \emptyset) \cap Z^C = X \cap Y^C \cap Z^C = X \cap Z^C \cap Y^C =$$
$$(X \setminus Z) \cap Y^C = (X \setminus Y) \setminus Z.$$

Protipríklad na druhú rovnosť môže byť $X = Y = Z = \{1\}$.

Druhá skupina mala v zadaní vymenené X,Z.

(2) Nech $\mathbb{N}^+ = \{1, 2, 3, \dots\}$. Nech $\rho \subseteq \mathbb{N}^+ \times \mathbb{N}^+$ je daná takto:

$$a \, \rho \, b :\Leftrightarrow a^2 | b,$$

kde $a^2|b$ znamená „a^2 delí b". Zistite, či je ρ reflexívna, symetrická, antisymetrická, tranzitívna.

(R) *nie:* $2^2 \nmid 2$.

(S) *nie:* $x = 2, y = 4$; $x^2 \mid y$ *a zároveň* $y^2 \nmid x$.

(AS) *áno:*

- *1. typ dôkazu:*
  Ak $y/x^2 \in \mathbb{N}^+$ *a zároveň* $x/y^2 \in \mathbb{N}^+$, *potom* $\frac{y}{x^2} . \frac{x}{y^2} \in \mathbb{N}^+$. *Keďže* $\frac{y}{x^2} . \frac{x}{y^2} = \frac{1}{xy}$, $xy|1$. *Teda* $xy = 1$ *a z toho vyplýva* $x = y = 1$.
- *2. typ dôkazu:*
  Ak $x^2|y$, *potom* $x^2 \leq y$. *Keďže* $x \geq 1$, $x \leq x^2$. *Máme* $x \leq x^2 \leq y$, *takže* $x \leq y$.
  Ak $y^2|x$, *potom* $y^2 \leq x$. *Keďže* $y \geq 1$, $y \leq y^2$. *Máme* $y \leq y^2 \leq x$, *takže* $y \leq x$.
  Keďže $x \leq y$ *a* $y \leq x$, $x = y$.
- *3. typ dôkazu:*
  Keďže $x^2|y$ *a zároveň* $y^2|x$, *existujú* $k, l \in \mathbb{N}^+$ *také, že* $y = k.x^2$, $x = l.y^2$. *Po dosadení dostávame* $x = l.(k.x^2)^2 = l.k^2.x^4$. *Keďže* $x > 0$, *môžeme rovnicu podeliť* x *a dostávame* $1 = l.k^2.x^3$. *Všetky premenné napravo sú delitele 1, teda rovné 1. Teda* $k = l = x = 1$ *a aj* $y = k.x^2 = 1$.

(T) *áno:*

- *1. typ dôkazu:*
  Ak $y/x^2, z/y^2 \in \mathbb{N}^+$, *potom* $\frac{y}{x^2} . \frac{z}{y^2} \in \mathbb{N}^+$, *po vykrátení* y *dostávame* $\frac{z}{x^2 . y} \in \mathbb{N}^+$. *Keďže* $x^2.y|z$, $x^2|z$.
- *2.typ dôkazu:*

Máme $y = k.x^2$ a $z = l.y^2$. Po dosadení dostávame $z = l.k^2.x^4 = (l.k^2.x^2).x^2$. Teda $x^2|z$.

(3) Nech $\sim$ je ekvivalencia na množine $\mathbb{R}^2$ daná takto:

$$(a_1, a_2) \sim (b_1, b_2) :\Leftrightarrow |a_1| + |a_2| = |b_1| + |b_2|$$

Nakreslite, ako vyzerá $\mathbb{R}^2/\sim$ a vyznačte triedy ekvivalencie $[(0,0)]_\sim$, $[(0,-1)]_\sim$, $[(1,1)]_\sim$.
Nemusíte dokazovať, že $\sim$ je ekvivalencia.

Triedy ekvivalencie sú štvorce su stredom v $(0,0)$. Pre jednu skupinu to boli štvorce so stranami rovnobežnými s osami x, y, pre druhú pootočené o $\pi/4$.

(4) Nech $A = \{0, 1, 2, 3\}$ a nech

$$P = \{(x_1, x_2) \in A \times A : x_1 + x_2 \text{ nie je deliteľné } 3\}.$$

Čiastočné usporiadanie na P je dané takto:

$$(x_1, x_2) \leq (y_1, y_2) :\Leftrightarrow (x_1 \leq y_1) \wedge (x_2 \leq y_2)$$

Nakreslite diagram posetu $(P, \leq)$ a nájdite minimálne, maximálne, najmenšie a najväčšie prvky.
Nemusíte dokazovať, že $\leq$ je čiastočné usporiadanie.

Nechce sa mi to kresliť, väčšina to mala dobre. Častá chyba bola, že $(0,0) \in P$. To nie je dobre, lebo $3|0$. V tej druhej skupine sa občas zabúdalo na $(4,4)$.