Skupina A

Prosím, napíšte čitateľne Vaše priezvisko a meno na tento papier aj na Vašu písomku. Zadanie odovzdajte spolu s písomkou.

(1) Dokážte alebo vyvráťte: pre všetky množiny X, Y, Z platí
 (a) $(X \cup Y) \setminus (Y \cup Z) = (X \setminus Z) \setminus Y$;
 (b) $(X \cup Y) \setminus (Y \cap Z) = X \setminus (Z \setminus Y)$.
 Ak rovnosť platí, dokážte ju pomocou rovností na ťaháku. Ak neplatí, nájdite protipríklad.

(2) Nech $\mathbb{N}^+ = \{1, 2, 3, \dots\}$. Nech $\rho \subseteq \mathbb{N}^+ \times \mathbb{N}^+$ je daná takto:
$$a \,\rho\, b :\Leftrightarrow a^2 | b,$$
kde $a^2|b$ znamená „a^2 delí b". Zistite, či je ρ reflexívna, symetrická, antisymetrická, tranzitívna.

(3) Nech $\sim$ je ekvivalencia na množine $\mathbb{R}^2$ daná takto:
$$(a_1, a_2) \sim (b_1, b_2) :\Leftrightarrow |a_1| + |a_2| = |b_1| + |b_2|$$
Nakreslite, ako vyzerá $\mathbb{R}^2/\sim$ a vyznačte triedy ekvivalencie $[(0,0)]_\sim$, $[(0,-1)]_\sim$, $[(1,1)]_\sim$.
Nemusíte dokazovať, že $\sim$ je ekvivalencia.

(4) Nech $A = \{0, 1, 2, 3\}$ a nech
$$P = \{(x_1, x_2) \in A \times A : x_1 + x_2 \text{ nie je deliteľné } 3\}.$$
Čiastočné usporiadanie na P je dané takto:
$$(x_1, x_2) \leq (y_1, y_2) :\Leftrightarrow (x_1 \leq y_1) \wedge (x_2 \leq y_2)$$
Nakreslite diagram posetu $(P, \leq)$ a nájdite minimálne, maximálne, najmenšie a najväčšie prvky.
Nemusíte dokazovať, že $\leq$ je čiastočné usporiadanie.

Skupina B

Prosím, napíšte čitateľne Vaše priezvisko a meno na tento papier aj na Vašu písomku. Zadanie odovzdajte spolu s písomkou.

(1) Dokážte alebo vyvráťte: pre všetky množiny X, Y, Z platí
 (a) $(Z \cup Y) \setminus (Y \cup X) = (Z \setminus X) \setminus Y$;
 (b) $(Z \cup Y) \setminus (Y \cap X) = Z \setminus (X \setminus Y)$.
 Ak rovnosť platí, dokážte ju pomocou rovností na ťaháku. Ak neplatí, nájdite protipríklad.

(2) Nech $\mathbb{N}^+ = \{1, 2, 3, \dots\}$. Nech $\rho \subseteq \mathbb{N}^+ \times \mathbb{N}^+$ je daná takto:
$$a \,\rho\, b :\Leftrightarrow a^2 | b,$$
kde $a^2|b$ znamená „a^2 delí b". Zistite, či je ρ reflexívna, symetrická, antisymetrická, tranzitívna.

(3) Nech $\sim$ je ekvivalencia na množine $\mathbb{R}^2$ daná takto:
$$(a_1, a_2) \sim (b_1, b_2) :\Leftrightarrow \max(|a_1|, |a_2|) = \max(|b_1|, |b_2|),$$
pričom $\max(p, q)$ znamená „maximum z čísel p, q".
 Nakreslite, ako vyzerá $\mathbb{R}^2/\sim$ a vyznačte triedy ekvivalencie $[(0,0)]_\sim$, $[(1,1)]_\sim$, $[(-2,0)]_\sim$.
Nemusíte dokazovať, že $\sim$ je ekvivalencia.

(4) Nech $A = \{1, 2, 3, 4\}$ a nech
$$P = \{(x_1, x_2) \in A \times A : x_1 + x_2 \text{ nie je deliteľné } 3\}.$$
Čiastočné usporiadanie na P je dané takto:
$$(x_1, x_2) \leq (y_1, y_2) :\Leftrightarrow (x_1 \leq y_1) \wedge (x_2 \leq y_2)$$
Nakreslite diagram posetu $(P, \leq)$ a nájdite minimálne, maximálne, najmenšie a najväčšie prvky.
Nemusíte dokazovať, že $\leq$ je čiastočné usporiadanie.