DISKRÉTNA MATEMATIKA A LOGIKA – PRÍKLADY

Znakom $(*)$ sú označené príklady, ktoré sa môžu javiť ako „ťažšie" tesne po príslušnej prednáške. Mali by ste však byť schopní ich zvládnuť s istým časovým odstupom, po diskusii s kolegami alebo s prednášajúcim/cvičiacim a podobne.

2. Čiastočne usporiadané množiny = posety

(1) Nech P je množina $\{0,1,2,3\} \times \{0,1,2,3\}$. Dokažte alebo vyvráťte, že $(P, \leq_i)$ je poset. Ak $(P, \leq_i)$ je poset, nakreslite diagram posetu.
   (a) $(a_1, a_2) \leq_1 (b_1, b_2)$ práve vtedy, keď $a_1 + a_2 \leq b_1 + b_2$.
   (b) $(a_1, a_2) \leq_2 (b_1, b_2)$ práve vtedy, keď $a_1 \leq b_1$ a zároveň $a_2 \leq b_2$.
   (c) $(a_1, a_2) \leq_3 (b_1, b_2)$ prave vtedy, keď $a_1 + a_2 \leq b_1 + b_2$ a zároveň $a_1 \leq b1$.
   (d) $(a_1, a_2) \leq_4 (b_1, b_2)$ práve vtedy, keď $a_1 - a_2 \leq b_1 - b_2$.
   (e) $(a_1, a_2) \leq_5 (b_1, b_2)$ práve vtedy, keď $a_1 - a_2 \leq b_1 - b_2$ a zároveň $a_1 \leq b_1$.

(2) Nech P je množina $\{0,1,2,3\} \times \{0,1,2,3\}$. Nech relácia $\leq$ na P je daná predpisom $(a_1, a_2) \leq (b_1, b_2)$ práve vtedy, keď $a_1 \leq b_1$ a zároveň $a_2 \leq b_2$.
   (a) Nech
   $$P_n = \{(x_1, x_2) : x_1 + x_2 \text{ je nepárne}\}.$$
   Dokažte, že $(P_n, \leq)$ je poset a nakreslite jeho diagram. Určte aj množiny najväčších, najmenších, maximálnych a minimálnych prvkov posetu $(P_n, \leq)$.
   (b) Nech
   $$P_p = \{(x_1, x_2) : x_1 + x_2 \text{ je párne}\}.$$
   Dokažte, že $(P_p, \leq)$ je poset a nakreslite jeho diagram. Určte aj množiny najväčších, najmenších, maximálnych a minimálnych prvkov posetu $(P_p, \leq)$.

(3) Nech $(P, \leq)$ je konečný poset. Dokážte, že ak v $(P, \leq)$ je práve jeden maximálny prvok m, potom m je najväčší prvok.

(4) Nájdite (podľa predošlého cvičenia nevyhnutne nekonečný) poset, ktorý má práve jeden maximálny prvok, ale nemá najväčší prvok.

(5) Dokážte, že ak $(P, \leq)$ je poset, potom aj $(P, \leq^{-1})$, kde $\leq^{-1}$ je daná predpisom
   $$x \leq^{-1} y :\Leftrightarrow y \leq x$$
   je tiež poset. Ak P je konečná množina, v akom vzťahu sú diagramy posetov $(P, \leq)$ a $(P, \leq^{-1})$?

(6) $(*)$ Ak $(P, \leq_1)$ a $(P, \leq_2)$ sú posety, je aj $(P, \leq_1 \cap \leq_2)$ poset? [1]

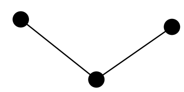
(7) Nech $(P_1, \leq_1)$, $(P_2, \leq_2)$ sú posety. Dokážte, že $(P_1 \times P_2, \leq)$ je poset, ak $\leq$ je daná predpisom
   $$(x_1, x_2) \leq (y_1, y_2) :\Leftrightarrow \; x_1 \leq y_1 \text{ a zároveň } x_2 \leq y_2.$$
   Nakreslite diagram $(P_1 \times P_2, \leq)$, ak P_1 je dvojprvkový reťazec a P_2 je trojprvkový reťazec. Táto konštrukcia sa nazýva *priamy súčet* posetov.

[1] Uvedomte si, že vzhľadom na definíciu relácie je $\leq_1 \cap \leq_2$ zmysluplný zápis.

(8) Nech $(P_1, \leq_1)$, $(P_2, \leq_2)$ sú posety. Dokážte, že $(P_1 \times P_2, \leq)$ je poset, ak $\leq$ je daná predpisom

$$(x_1, x_2) \leq (y_1, y_2) :\Leftrightarrow \ x_1 < y_1 \text{ alebo } (x_1 = y_1 \text{ a zároveň } x_2 \leq y_2)$$

Nakreslite diagram $(P_1 \times P_2, \leq)$, ak P_1 je dvojprvkový reťazec a P_2 je tento poset:



Urobte to isté, ale s vymeneným P_1 a P_2. Táto konštrukcia sa nazýva *lexikografický súčet* posetov.

(9) Nech C je množina všetkých diferencovateľných funkcií z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$. Ukážte $(C, \leq)$ nie je poset, ak $\leq$ je daná predpisom

$$f \leq g :\Leftrightarrow \ (\forall x \in \mathbb{R}) : f'(x) \leq g'(x)$$

.

(10) $(*)$ Nech P je množina, nech ρ je relácia na P, ktorá je reflexívna a tranzitívna, avšak nie nevyhnutne antisymetrická (tak ako v predošlom príklade). Dokážte, že $\sim \subseteq P \times P$ daná predpisom

$$a \sim b :\Leftrightarrow \ a\rho b \text{ a zároveň } b\rho a$$

je relácia ekvivalencie. Uvažujte teraz $(P/\sim, \leq)$ (t.j. $\leq$ je relácia na triedach ekvivalencie $\sim$), kde $\leq$ je dané predpisom $A \leq B :\Leftrightarrow (\exists x \in A,\ y \in B) : x\rho y$. Dokážte, že $(P/\sim, \leq)$ je poset.