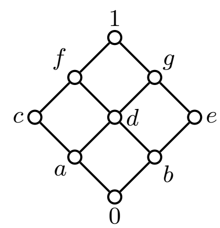
DISKRÉTNA MATEMATIKA A LOGIKA – PRÍKLADY

(1) Nech L je zväz, ktorého diagram je takýto.

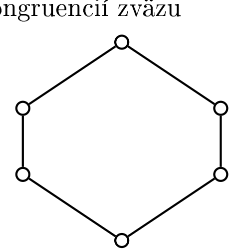


(a) Zistite či relácie ekvivalencie na L prislúchajúce rozkladom
(i) $\{\{0\},\{a,b\},\{c,d,e\},\{f,g\},\{1\}\}$;
(ii) $\{\{0,a,c\},\{b,d,f\},\{e,g,1\}\}$;
(iii) $\{\{0,a,b,c,d,e,f,g,1\}$
sú kongruencie. Ak áno, vždy nakreslite diagram príslušného faktorového zväzu.

(b) Nájdite kongruencie (ak existujú) Θ_i zväzu L také, aby
(i) $[d]_{\Theta_1} = \{a,b,d,0\}$;
(ii) $[d]_{\Theta_2} = \{1,f,g,d\}$;
(iii) $[d]_{\Theta_3} = \{d,b\}$;
(iv) $[d]_{\Theta_4} = \{d,e\}$.
Ak kongruencia existuje, nakreslite aj diagram príslušného faktorového zväzu. Ak neexistuje, dokážte že neexistuje.

(2) Nájdite všetky kongruencie 4-prvkového reťazca (stačí, ak si nakreslíte rozklady podľa nich).

(3) Nájdite zopár (aspoň 3) kongruencií zväzu



(stačí, ak si nakreslíte rozklady podľa nich).

(4) Uvažujme zväz $(2^{\mathbb{N}},\cap,\cup)$. Nech Θ je relácia na $2^{\mathbb{N}}$ daná predpisom

$$A\Theta B :\Leftrightarrow A\cap\{1,2,3\} = B\cap\{1,2,3\}$$

Dokážte, že Θ je kongruencia na $2^{\mathbb{N}}$. Koľko je tried v rozklade $2^{\mathbb{N}}/\Theta$? [osem]

(5) Nech L je zväz, vyberme ľubovoľný prvok $q \in L$. Nech Θ_q je relácia daná predpisom

$$a\Theta_q b :\Leftrightarrow a\wedge q = b\wedge q.$$

(a) Dokážte, že ak L je distributívny, potom Θ_q je kongruencia na L.

(b) Nájdite nedistributívny zväz L a $q \in L$ také, že Θ_q nebude kongruencia na L. [aký je najjednoduchší nedistributívny zväz?]

(c) Pre zväz L z cvičenia (1) nakreslite rozklady L podľa zopár takýchto Θ_q, kde $q \in L$. Skúste aj $q = 0$, $q = 1$.

(6) Nech L je zväz, nech Θ je kongruencia na L. Nech a, b sú také, že $a\Theta b$. Dokážte, že
(a) $a\Theta(a \vee b)$,
(b) $a\Theta(a \wedge b)$.

(7) Dokážte, že ak L je zväz a Θ je kongruencia na L, potom každá trieda rozkladu L/Θ je podzväzom L.

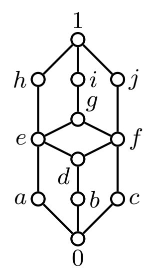
(8) Nech L je zväz, nech Θ je kongruencia na L. Nech a, b, c sú také, že $a \leq b \leq c$ a zároveň $a\Theta c$. Dokážte, že potom $a\Theta b$ a zároveň $b\Theta c$.

(9) Dokážte, že ak Θ, Ψ sú kongruencie na zväze L, potom $\Theta \cap \Psi$ je kongruencia na L.

(10) Dokážte, že pre každú kongruenciu Θ na zväze platí $x\Theta y \Leftrightarrow (x \vee y)\Theta(x \wedge y)$.

(11) Nech Θ je taká relácia ekvivalencie na zväze L, že pre všetky a_1, a_2, b také, že $a_1\Theta a$ platí, že $(a_1 \vee b)\Theta(a_2 \vee b)$ a zároveň $(a_1 \wedge b)\Theta(a_2 \wedge b)$. Dokážte, že Θ je kongruencia.

(12) Nech L je takýto zväz:



(a) Dokážte, že neexistuje taká kongruencia Θ na L, že $\{0, b\} \in L/\Theta$.
(b) Nájdite najmenšiu kongruenciu Θ_1 na L takú, že $1\Theta_1 i$.
(c) Nájdite najmenšiu kongruenciu Θ_2 na L takú, že $1\Theta_2 i$ a zároveň $0\Theta_2 b$.
Vždy nakreslite aj diagram faktorového zväzu L/Θ_i.

(13) Nech M je množina. Uvažujme zväz $(2^M, \cap, \cup)$. Množina prvkov 2^M (t.j. množina podmnožín M) sa volá *ideál* ak platia tieto podmienky:
(I1) $I \neq \emptyset$,
(I2) I je dolná množina posetu $(2^M, \subseteq)$,
(I3) ak $X, Y \in I$, potom $X \cup Y \in I$.
(a) Dokážte, že množina všetkých konečných podmnožín množiny M je ideál.
(b) Dokážte, že ak $A \in 2^M$, potom

$$I_A = \{X \in 2^M : X \subseteq A\}$$

je ideál.
(c) Nech $A, B \in 2^M$. Ako vyzerá najmenší ideál I taký, že $A, B \in I$?
(d) Nech Θ je kongruencia na zväze $(2^M, \cap, \cup)$. Dokážte, že $[\emptyset]_\Theta$ je ideál.
(e) $(*)$ Nech I je ideál. Definujme reláciu Θ_I na 2^M takto:

$$A\Theta_I B :\Leftrightarrow (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \in I.$$

Dokážte, že Θ_I je kongruencia na zväze $(2^M, \cap, \cup)$. Nezabudnite dokázať, že to je ekvivalencia.