DISKRÉTNA MATEMATIKA A LOGIKA – PRÍKLADY

Znakom $(*)$ sú označené príklady, ktoré sa môžu javiť ako „ťažšie" tesne po príslušnej prednáške. Mali by ste však byť schopní ich zvládnuť s istým časovým odstupom, po diskusii s kolegami alebo s prednášajúcim/cvičiacim a podobne.

(1) Zistite, či sú nasledujúce relácie na danej grupe kongruencie. Ak áno, skúste nahliadnuť ako vyzerá faktorová grupa. Koľko prvkov majú triedy? Koľko je tried? Je faktorová grupa izomorfná nejakej známej grupe?

(a) Grupa $(\mathbb{R}\setminus\{0\},.)$, relácia

$$x_1\Theta x_2 :\Longleftrightarrow x_1.x_2 > 0$$

[áno]

(b) Grupa $(\mathbb{R}\setminus\{0\},.)$, relácia

$$x_1\Theta x_2 \Longleftrightarrow \text{existujú } k,l\in\mathbb{Q} \text{ také, že } \frac{x_1}{x_2} = k + l.\sqrt{2}$$

[áno][1]

(c) Grupa $(\mathbb{R}\setminus\{0\},.)$, relácia

$$x_1\Theta x_2 \Longleftrightarrow x^2 = y^2$$

[áno]

(d) Grupa $(\mathbb{R}\setminus\{0\},.)$, relácia

$$x_1\Theta x_2 \Longleftrightarrow x_1 - x_2 \in \mathbb{Q}$$

[nie]

(e) Grupa $(\mathbb{R},+)$, relácia

$$x_1\Theta x_2 \Longleftrightarrow x_1 - x_2 \in \mathbb{Q}$$

[áno]

(f) Grupa $(\mathbb{R},+)$, relácia

$$x_1\Theta x_2 \Longleftrightarrow x_1 + x_2 \in \mathbb{Q}$$

[nie]

(g) Grupa $(\mathbb{R}\setminus\{0\},.)$, relácia

$$x_1\Theta x_2 \Longleftrightarrow \frac{x_1^2}{x_2^2} \in \mathbb{Q}$$

[áno]

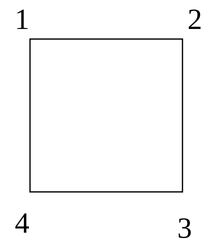
(h) Grupa S_n, relácia

$$f_1\Theta f_2 \Longleftrightarrow f_1(1) = f_2(1)$$

[skoro vždy nie]

(2) Nech D_4 je podgrupa S_4 zodpovedajúca symetriám štvorca s vrcholmi $\{1,2,3,4\}$, pričom ten štvorec je takýto

[1] V dôkaze, že Θ je symetrická, nezabudnite ošetriť prípad $k^2 - 2l^2 = 0$.



(a) Nakreslite Cayleyho tabuľku D_4.
(b) Nájdite prvky $r, t \in D_4$ také, že každý prvok $f \in D_4$ sa dá napísať v tvare $f = r^n.t^m$, $n, m \in \mathbb{N}$.
(c) Je D_4 normálnou podgrupou S_4?
(d) Je grupa rotácií $H = \{(), (1234), (13)(24), (1432)\}$ normálnou podgrupou D_4?
(e) Je H normálnou podgrupou S_4?
(f) Je $\{(), (13)(24)\}$ normálnou podgrupou grúp H, D_4, S_4?
(g) Pre všetky predošlé body, ak je podgrupa normálna, nájdite faktorovú grupu a zistite, či je abelovská.

(3) Nech H_1, H_2 sú normálne podgrupy grupy G. Je $H_1 \cap H_2$ normálna podgrupa grupy G?

(4) Nech H_1, H_2 sú podgrupy grupy G. Označme
$$H_1.H_2 = \{x_1.x_2 : x_1 \in H_1, x_2 \in H_2\}.$$
Dokážte nasledujúce tvrdenia.
(a) $H_1.H_2$ nemusí byť podgrupa G.
(b) Ak $H_1.H_2$ je podgrupa G, potom to je v zmysle $\subseteq$ najmenšia podgrupa obsahujúca H_1, H_2 ako podmnožiny.
(c) Ak H_1 alebo H_2 je normálna, potom $H_1.H_2$ je podgrupa G.
(d) Ak H_1, H_2 sú normálne podgrupy, potom $H_1.H_2$ je normálna podgrupa G.

(5) $(*)$ Nech H je normálna podgrupa grupy G, nech K je normálna podgrupa grupy H. Je K normálna podgrupa grupy G? Inými slovami, je relácia "byť normálnou podgrupou"na množine všetkých podgrúp G tranzitívna? [nie vždy] [2]

(6) Nech L je množina reálnych lineárnych rýdzomonotónnych funkcií, t.j. množina všetkých funkcií $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ktoré sú dané predpisom
$$f(x) = px + q \qquad p \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, q \in \mathbb{R}.$$
(a) Dokážte, že $(L, \circ)$, kde $\circ$ je skladanie zobrazení tvorí grupu. Čo sa zmení, ak povolíme $p = 0$?
(b) Je L abelovská?
(c) Nech $L^+ \subseteq L$ je množina všetkých rastúcich funkcií v L. Dokážte, že L^+ je normálna podgrupa L. Ako vyzerá L/L^+?
(d) Nech $L^1 \subseteq L^+$ je množina takých funkcií, ktoré majú deriváciu rovnú 1. Je L^1 normálna podgrupa L^+, L? Ak áno, ako vyzerajú grupy $L/L^1, L^+/L^1$? Dokážte, že L^1 je abelovská.
(e) Nájdite $Z(L)$ (viď cvičenie nižsie).

[2] Protipríklad sa dá nájsť pre $G = D_4$.

(7) Nech G je grupa. *Centrum* G je množina tých prvkov G, ktoré komutujú so všetkými ostatnými prvkami:

$$Z(G) = \{x : (\forall y \in G) xy = yx\}$$

Dokážte, že $Z(G)$ je normálna podgrupa G. Určte $Z(S_3)$, $Z(D_4)$.

(8) Nech G je grupa. Nech $Inn(G)$ je množina všetkých zobrazení $\phi_y : G \to G$, kde $y \in G$ a zobrazenie ϕ_y je pre dané y určené predpisom

$$\phi_y(x) = y.x.y^{-1}.$$

Prvky $Inn(G)$ sa nazývajú *vnútorné automorfizmy* G. Dokážte, že $Inn(G)$ vybavená operáciou skladania zobrazení je grupa. Ako vyzerá $Inn(G)$, ak G je abelovská? Koľko prvkov má $Inn(D_4)$?

(9) ($*$) Nech G je grupa. Dokážte, že $G/Z(G)$ je izomorfná s $Inn(G)$. Pomôcky:
  (a) Dokážte, že $y \in Z(G) \iff \phi_y$ je identické zobrazenie.
  (b) Dokážte, že $y_1, y_2 \in G$ sú kongruentné vzhľadom na $Z(G)$ práve vtedy, keď $\phi_{y_1} = \phi_{y_2}$.
  (c) Dokážte, že $\psi : G/Z(G) \to Inn(G)$ dané predpisom $\psi([y]_{Z(G)}) = \phi_y$ je izomorfizmus grúp.

(10) Dokážte, že ak G je n-prvková grupa, potom pre každé $x \in G$ platí $x^n = e$.

(11) Dokážte, že ak G je $2n$-prvková grupa, potom každá n-prvkov8 podgrupa G je normálna.

(12) Dokážte, že ak grupa G má p prvkov, kde p je prvočíslo, potom G je izomorfná grupe $(\mathbb{Z}_p, +)$.

(13) ($*$) Dokážte, že ak grupa G má p^2 prvkov, kde p je prvočíslo, potom G je abelovská.