(1) Zistite, či operácia $*$ na $\mathbb{R}$ daná predpisom

$$x * y := x^3 + y^3 + 1$$

je komutatívna, asociatívna a či má jednotkový prvok.

Komutatívna bola. Asociatívna nie; vyskytovala sa chyba so zabudnutou mocninou, potom vychádzalo $x * (y * z) = x^3 + y^3 + z^3 + 2$, *čo je zle. Bolo treba zvoliť vhodný protipríklad, inak vychádzali veľké čísla. Za tvrdenia, že vychádzajú na dvoch stranách asociatívnej rovnosti rôzne mocniny, a teda rovnosť neplatí som nedával plný počet. Používa sa totiž (explicitne neformulované) tvrdenie, že dve polynomické funkcie* $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *sú rovné práve vtedy, keď majú rovnaké koeficienty. To je síce pravda, ale dokázať to nie je triviálne.*

Jednotkový prvok neexistuje, vychádza totiž $e = \sqrt[3]{x - 1 - x^3}$ *pre všetky* $x \in R$. *Pre rôzne* x *vychádza rôzne* e, *a jednotkový prvok je vždy nanajvýš jeden.*

(2) Dokážte, že $(\mathbb{R}, *)$ je grupa, ak $*$ je daná predpisom

$$x * y := \sqrt[3]{x^3 + y^3 + 8}$$

Uvedomte si, že $\sqrt[3]{x}$ je definovaná aj pre $x < 0$.

Tu boli dva problémy: jeden bol so zabudnutou treťou mocninou, potom to nevyšlo asociatívne. Jednotkový prvok bol 2 *resp.* -2. *Ďalší bol s tým, že mnohí si mysleli, že* $x^{-1} = 1/x$. *To nie je dobre;* x^{-1} *je v kontexte grúp ten prvok, ktorý vzhľadom na* x *spĺňa axiómu (G3). V tejto skupine vychádzalo*

$$x * x^{-1} = \sqrt[3]{x^3 + (x^{-1})^3 + 8} = -2.$$

Toto bolo treba riešiť ako parametrickú rovnicu s parametrom x *a neznámou* x^{-1}, *vyšlo* $x^{-1} = \sqrt[3]{-16 - x^3}$.

(3) Nájdite najmenšiu podgrupu H grupy S_4, ktorá obsahuje prvok (1324). Nakreslite Cayleyho tabuľku H. Nájdite aspoň 2 rôzne pravé kosety H v S_4. Koľko je pravých kosetov H v S_4? Prečo?

Bežný príklad, podobný bol riešený aj na cvičení

(4) Nech $(G, .)$ je grupa. Pre ľubovoľnú usporiadanú dvojicu $(a, b) \in G \times G$ definujme zobrazenie $\phi_{a,b} : \mathbb{Z} \to G$ takto:

$$\phi_{a,b}(k) = ba^k b^{-1}.$$

(a) Dokážte že $\phi_{a,b}$ je homomorfizmus z grupy $(\mathbb{Z}, +)$ do grupy G.

(b) Dokážte, že $\mathrm{Ker}(\phi_{a,b})$ nezávisí na voľbe prvku b, to znamená

$$\forall b_1, b_2 \in G : \mathrm{Ker}(\phi_{a,b_1}) = \mathrm{Ker}(\phi_{a,b_2}).$$

Tuná som predpokladal, že najväčší problém bude napísať to, čo treba dokázať:

$$\phi_{a,b}(k+l) = \phi_{a,b}(k).\phi_{a,b}(l).$$

Potom už mala byť cesta k dôkazu, že $\phi_{a,b}$ *je homomorfizmus už voľná. Ale nebola. Problém* [1] *je v tom, že keď napíšem „Nech* $(G,.)$ *je grupa.", tak si myslíte, že . na* G *je komutatívny. To nie je vo všeobecnosti pravda, lebo grupa je predsa grupoid spĺňajúci axiómy (G1), (G2), (G3). A z tých axióm nevyplýva komutativita. Teda ju nemôžete použiť. Správny dôkaz som robil na cviku a nechce sa mi ho znovu písať. Nesprávny dôkaz viedol potom k tvrdeniu* $\phi_{a,b}(n) = a^n$*, ktoré nie je pravdivé pre všeobecnú grupu* G*. Vyskytovali sa dokonca hojne pre* G *aj tvrdenia typu* $e = 1$*, prípadne dokonca* $b^{-1} = 1/b$*, čo je holý nezmysel. Zrejme si myslíte, keď tam je násobenie, tak to budú čísla. O prvkoch* G *však nič nevieme! Vieme iba, že* $(G,.)$ *je grupa.*

[1] Ešte stále nerozumiem tomu kde presne v mojom výklade som spravil pedagogickú chybu, ktorá viedla v toľkých hlavách ku zmätku.