Skupina A

Prosím, napíšte čitateľne Vaše priezvisko a meno na tento papier aj na Vašu písomku. Zadanie odovzdajte spolu s písomkou.

(1) Zistite, či operácia $*$ na $\mathbb{R}$ daná predpisom

$$x * y := x^3 + y^3 + 1$$

je komutatívna, asociatívna a či má jednotkový prvok.

(2) Dokážte, že $(\mathbb{R}, *)$ je grupa, ak $*$ je daná predpisom

$$x * y := \sqrt[3]{x^3 + y^3 + 8}$$

Uvedomte si, že $\sqrt[3]{x}$ je definovaná aj pre $x < 0$.

(3) Nájdite najmenšiu podgrupu H grupy S_4, ktorá obsahuje prvok (1324). Nakreslite Cayleyho tabuľku H. Nájdite aspoň 2 rôzne pravé kosety H v S_4. Koľko je pravých kosetov H v S_4? Prečo?

(4) Nech $(G, .)$ je grupa. Pre ľubovoľnú usporiadanú dvojicu $(a, b) \in G \times G$ definujme zobrazenie $\phi_{a,b} : \mathbb{Z} \to G$ takto:

$$\phi_{a,b}(k) = ba^k b^{-1}.$$

(a) Dokážte že $\phi_{a,b}$ je homomorfizmus z grupy $(\mathbb{Z}, +)$ do grupy G.

(b) Dokážte, že $\mathrm{Ker}(\phi_{a,b})$ nezávisí na voľbe prvku b, to znamená

$$\forall b_1, b_2 \in G : \mathrm{Ker}(\phi_{a,b_1}) = \mathrm{Ker}(\phi_{a,b_2}).$$

Skupina B

Prosím, napíšte čitateľne Vaše priezvisko a meno na tento papier aj na Vašu písomku. Zadanie odovzdajte spolu s písomkou.

(1) Zistite, či operácia $*$ na $\mathbb{R}$ daná predpisom

$$x * y := x^3 + y^3 - 1$$

je komutatívna, asociatívna a či má jednotkový prvok.

(2) Dokážte, že $(\mathbb{R}, *)$ je grupa, ak $*$ je daná predpisom

$$x * y := \sqrt[3]{x^3 + y^3 - 8}$$

Uvedomte si, že $\sqrt[3]{x}$ je definovaná aj pre $x < 0$.

(3) Nájdite najmenšiu podgrupu H grupy S_4, ktorá obsahuje prvok (1342). Nakreslite Cayleyho tabuľku H. Nájdite aspoň 2 rôzne pravé kosety H v S_4. Koľko je pravých kosetov H v S_4? Prečo?

(4) Nech $(G, .)$ je grupa. Pre ľubovoľnú usporiadanú dvojicu $(a, b) \in G \times G$ definujme zobrazenie $\phi_{a,b} : \mathbb{Z} \to G$ takto:

$$\phi_{a,b}(k) = ba^k b^{-1}.$$

(a) Dokážte že $\phi_{a,b}$ je homomorfizmus z grupy $(\mathbb{Z}, +)$ do grupy G.

(b) Dokážte, že $\mathrm{Ker}(\phi_{a,b})$ nezávisí na voľbe prvku b, to znamená

$$\forall b_1, b_2 \in G : \mathrm{Ker}(\phi_{a,b_1}) = \mathrm{Ker}(\phi_{a,b_2}).$$