

Úloha

Zistite, či je relácia $\rho \subseteq R^+ \times R^+$, kde R^+ je reálny interval $(0, \infty)$ daná predpisom

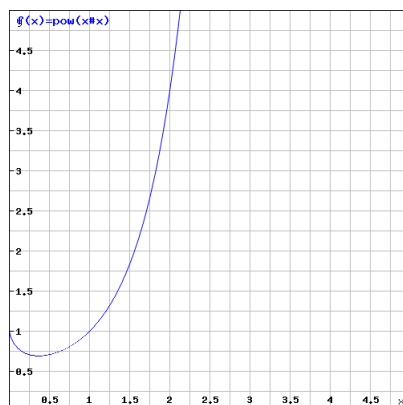
$$x\rho y :\Leftrightarrow \sqrt[x]{y} \leq \sqrt[y]{x}$$

reflexívna, symetrická, antisymetrická, tranzitívna.

Riešenie

Nerovnicu na pravej strane predpisu, teda $\sqrt[x]{y} \leq \sqrt[y]{x}$, môžeme po umocnení ľavej i pravej strany výrazom xy (je dané z definície relácie, že $x, y \in R^+$, teda výraz $xy > 0$ a znamienko nerovnosti sa nezmení) upraviť na ekvivalentný tvar $y^y \leq x^x$.

1. Relácia ρ je reflektívna vtedy a len vtedy, ak platí: $\forall a \in R^+ : a\rho a$, teda $\forall a \in R^+ : a^a \leq a^a$ čo platí, pretože platí rovnica $\forall a \in R^+ : a^a = a^a$, a z toho vyplýva, že platí aj $a^a \leq a^a$. Platnosťou podmienky pre reflexívnosť sme dokázali, že **relácia ρ je reflexívna**.
2. Relácia ρ je symetrická vtedy a len vtedy, ak platí: $\forall a, b \in R^+ : a\rho b \Rightarrow b\rho a$, teda $\forall a, b \in R^+ : b^b \leq a^a \Rightarrow a^a \leq b^b$. Ako dôkaz, že daný výraz neplatí, uvádzam kontrapríklad, keď $a=2$, $b=1$. Dosadením hodnôt do výrazu dostaneme $1^1 \leq 2^2 \Rightarrow 2^2 \leq 1^1$, čo evidentne neplatí, pretože ľavá strana implikácie je pravdivá a pravá strana nie je, tým je implikácia podľa jej definície nepravdivá. Týmto spôsobom sme dokázali, že **relácia ρ nie je symetrická**.
3. Relácia ρ je antisymetrická vtedy a len vtedy, ak platí: $\forall a, b \in R^+ : (a\rho b \wedge b\rho a) \Rightarrow a = b$, teda $\forall a, b \in R^+ : (b^b \leq a^a \wedge a^a \leq b^b) \Rightarrow a = b$. Z ľavej strany implikácie vyplýva, že musí platiť $a^a = b^b$. Dostali sme teda ekvivalentný výraz $\forall a, b \in R^+ : a^a = b^b \Rightarrow a = b$. Vezmime si teraz funkciu $f : R^+ \rightarrow R^+$ definovanú predpisom $f(x) = x^x$. Graf tejto funkcie je zobrazený nižšie:



Z grafu funkcie f je evidentné, že funkcia $f(x) = x^x$ nie je na intervale $(0,1)$ injektívna, teda platí, že: $\exists x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+ : f(x_1) = f(x_2) \wedge x_1 \neq x_2$. Dokážeme to nasledovne:

Nech f' je derivácia funkcie f , teda $f'(x) = x^x (\ln x + 1)$. Funkcia f má v bode $x = e^{-1}$ globálne minimum, pretože $f'(e^{-1}) = 0$. Rozdelíme si teda definičný obor $\mathbb{R}^+$ funkcie f' na intervaly $(0, e^{-1})$ a (e^{-1}, ∞) . Po dosadení ľubovoľného čísla z prvého intervalu platí $f' < 0$ a z druhého intervalu $f' > 0$. Funkcia f je teda rýdzoklesajúca na intervale $(0, e^{-1})$ a rýdzorastúca na intervale (e^{-1}, ∞) , pričom v bode e^{-1} má globálne minimum. Musí teda nutne platiť dokazovaný výrok $\exists x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+ : f(x_1) = f(x_2) \wedge x_1 \neq x_2$ (z predošlého odstavca), a teda sme dokázali, že funkcia $f(x) = x^x$ nie je injektívna. $\square$

Po substitúcií $x_1 \rightarrow a$, $x_2 \rightarrow b$ a dosadení a^a za $f(a)$, respektíve b^b za $f(b)$ dostávame: $\exists x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+ : a^a = b^b \wedge a \neq b$, čo je kontradikcia k odvodennej podmienke antisymetrickej pre reláciu. Tým sme dokázali, že **relácia ρ nie je antisymetrická**.

4. Relácia ρ je tranzitívna vtedy a len vtedy, ak platí: $\forall a, b, c \in \mathbb{R}^+ : (a \rho b \wedge b \rho c) \Rightarrow a \rho c$, teda $\forall a, b, c \in \mathbb{R}^+ : (b^b \leq a^a \wedge c^c \leq b^b) \Rightarrow c^c \leq a^a$. Keď si graficky znázorníme vzťah medzi a^a , b^b a c^c uvedený na ľavej strane implikácie, dostaneme:

$$\begin{array}{c} \text{---|---|---} \rightarrow \mathbb{R}^+ \\ \quad \quad \quad | \quad \quad | \quad \quad | \\ c^c \quad \leq \quad b^b \quad \leq \quad a^a \end{array}$$

Z uvedeného zobrazenia je evidentné, že platí: $c^c \leq a^a$, pretože operácia $\leq$ je komutatívna. Týmto sme dokázali platnosť podmienky pre tranzitívnosť relácie ρ , čím sme dokázali, že **relácia ρ je tranzitívna**.