

Dôkaz pomocných tvrdení:

$$t1: A \cup \emptyset =^{(e2)} A \cup (A \cap A^C) =^{(c1)} A$$

$$t2: A \cap U =^{(e1)} A \cap (A \cup A^C) =^{(c2)} A$$

$$t3: A \cup U =^{(e1)} A \cup (A \cup A^C) =^{(a1)} (A \cup A) \cup A^C =^{(p2)} A \cup A^C =^{(e1)} U$$

Prvá časť dôkazu:

$$\begin{aligned} A^C \cap B^C &=^{(t1)} (A^C \cap B^C) \cup \emptyset =^{(e2)} (A^C \cap B^C) \cup [(A \cup B) \cap (A \cup B)^C] =^{(d1)} \\ &[(A^C \cap B^C) \cup (A \cup B)] \cap [(A^C \cap B^C) \cup (A \cup B)^C] =^{(e1)} ([U \cap (B^C \cup A)] \cup B) \cap \\ &[(A^C \cap B^C) \cup (A \cup B)^C] =^{(t2)} [(B^C \cup A) \cup B] \cap [(A^C \cap B^C) \cup (A \cup B)^C] =^{(b1+a1)} \\ &[(B^C \cup B) \cup A] \cap [(A^C \cap B^C) \cup (A \cup B)^C] =^{(e1)} [U \cup A] \cap [(A^C \cap B^C) \cup (A \cup B)^C] =^{(t3)} \\ &U \cap [(A^C \cap B^C) \cup (A \cup B)^C] =^{(t2)} (A^C \cap B^C) \cup (A \cup B)^C \end{aligned}$$

Čiže sme dostali  $A^C \cap B^C = (A^C \cap B^C) \cup (A \cup B)^C$ .

Aby to platilo, musí platiť:  $(A \cup B)^C \subseteq A^C \cap B^C$ .

Druhá časť dôkazu:

$$\begin{aligned} A^C \cap B^C &=^{(t2)} (A^C \cap B^C) \cap U =^{(e1)} (A^C \cap B^C) \cap [(A \cup B)^C \cup (A \cup B)] =^{(d2)} \\ &[(A^C \cap B^C) \cap (A \cup B)^C] \cup [(A^C \cap B^C) \cap (A \cup B)] =^{(d2)} [(A^C \cap B^C) \cap (A \cup B)^C] \cup \\ &[(A^C \cap B^C \cap A) \cup (A^C \cap B^C \cap B)] =^{(b2+a2+e2)} [(A^C \cap B^C) \cap (A \cup B)^C] \cup (\emptyset \cup \emptyset) =^{(p2)} \\ &[(A^C \cap B^C) \cap (A \cup B)^C] \cup \emptyset =^{(t1)} (A^C \cap B^C) \cap (A \cup B)^C \end{aligned}$$

Čiže sme dostali  $A^C \cap B^C = (A^C \cap B^C) \cap (A \cup B)^C$ .

Aby to platilo, musí platiť:  $(A \cup B)^C \supseteq A^C \cap B^C$ .

$$A \text{ teda: } ((A \cup B)^C \subseteq A^C \cap B^C) \wedge ((A \cup B)^C \supseteq A^C \cap B^C) \Rightarrow ((A \cup B)^C = A^C \cap B^C)$$