Igor Andruška

Prémia 3

$(A \cap B)^C \overset{?}{=} A^C \cup B^C$

<u>Pomocné vety:</u>

f1) $A \cap A = A$ f2) $A \cup A = A$

x1) $A \cup \emptyset = A$

dôkaz: $A \overset{c1}{=} A \cup (A \cap A^C) \overset{e2}{=} A \cup \emptyset$

x2) $A \cap U = A$

dôkaz: $A \overset{c2}{=} A \cap (A \cup A^C) \overset{e1}{=} A \cap U$

x3) $A \cap \emptyset = \emptyset$

dôkaz: $A \cap \emptyset \overset{e2}{=} A \cap (A \cap A^C) \overset{a2}{=} (A \cap A) \cap A^C \overset{f1}{=} A \cap A^C \overset{e2}{=} \emptyset$

x4) $A \cup U = U$

dôkaz: $A \cup U \overset{e1}{=} A \cup (A \cup A^C) \overset{a1}{=} (A \cup A) \cup A^C \overset{f2}{=} A \cup A^C \overset{e1}{=} U$

<u>Dôkaz de Morganovho zákona:</u>

$A \cap B$ je komplementom ku $A^C \cup B^C$ vtedy a len vtedy ak platí:

$(A \cap B) \cup (A^C \cup B^C) = U$ (podľa e1)

a zároveň $(A \cap B) \cap (A^C \cup B^C) = \emptyset$ (podľa e2)

(množiny $A \cap B$ a $A^C \cup B^C$ sú disjunktné a ich zjednotenie tvorí univerzum)

Stačí dokázať uvedené 2 rovnosti:

1)

$$(A \cap B) \cup (A^C \cup B^C) \overset{a1}{=} [(A \cap B) \cup A^C] \cup B^C \overset{d1}{=} [(A \cup A^C) \cap (B \cup A^C)] \cup B^C \overset{e1}{=} [U \cap (B \cup A^C)] \cup B^C \overset{x2}{=}$$

$$\overset{x2}{=} (B \cup A^C) \cup B^C \overset{a1}{=} A^C \cup (B \cup B^C) \overset{e1}{=} A^C \cup U \overset{x4}{=} U$$

2)

$$(A \cap B) \cap (A^C \cup B^C) \overset{a2}{=} A \cap [B \cap (A^C \cup B^C)] \overset{d2}{=} A \cap [(B \cap A^C) \cup (B \cap B^C)] \overset{e2}{=} A \cap [(B \cap A^C) \cup \emptyset] \overset{x1}{=}$$

$$\overset{x1}{=} A \cap (B \cap A^C) \overset{a2}{=} (A \cap A^C) \cap B \overset{e2}{=} B \cap \emptyset \overset{x3}{=} \emptyset$$

Platí $\left(A \cap B\right)^C = A^C \cup B^C$