

A. Zväzy – vlastnosti

Pojmy

Podzväz

podzväz je podmnožinou zväzu, ktorý je sám zväzom a navyše: má rovnaké infimum aj supréum ako pôvodný zväz, tj. ide o bin. operácie s rovnakými výsledkami ako pôvodne.

Distributívny zväz

zväz, v ktorom platí "obojsstranný" distributívny zákon:

$$D1 \quad x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$$

$$D2 \quad x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$$

Veta: Zväz je distributívny práve vtedy, ak neobsahuje podzväz izomorfný s N5 ani M5 (N5 a M5 budú ešte predstavené).

Modulárny zväz

zväz, v ktorom platí "obojsstranný" distributívny zákon **za podmienky**, že $x \leq z$ ($\leq$ tu zastupuje danú reláciu ČU). Ide teda o slabší odvar distributívneho zväzu. Distributívny zväz je vždy aj modulárny, opačne to platiť nemusí.

Nech teda $x \leq z$.

Potom vieme upraviť (dobré si premyslite, prečo to takto ide):

$$D1 \quad x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$$

na $x = x$ – to platí vždy, nie je zaujímavé.

$$D2 \quad x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$$

na $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge z$

Záver: zväz je modulárny, ak pre všetky $x \leq z$ platí $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge z$

Zväz je modulárny práve vtedy, ak neobsahuje podzväz izomorfný s N5 (ale M5 môže byť).

Komplementárny zväz

zväz, v ktorom existujú 0 a 1, a pre každý (!) prvok x existuje komplement x' taký, že platí:

$$x \wedge x' = 0$$

$$x \vee x' = 1$$

V distributívnom zväze je komplement prvku x (ak existuje) určený jednoznačne.

Ak je zväz **komplementárny** a zároveň **distributívny**, nazýva sa **Boolovský zväz** alebo **Boolova/Booolovská algebra**.

<http://www.math.muni.cz/~kucera/texty/Svazy2010.pdf>

Riešené príklady

Príklad 1a

Dokážte, že pre trojicu prvkov x, y, z je vždy splnený distributívny zákon, pokiaľ jeden z prvkov sa rovná 0 alebo 1, alebo ak sa dva z prvkov rovnajú.

Riešenie:

Niektoré z rovností sú triviálne, pri ostatných si to treba predstaviť krok za krokom podľa definície suprema/infima.

$x=0$:	$0 \wedge (y \vee z) = (0 \wedge y) \vee (0 \wedge z)$	
	$0 = 0 \vee 0$	✓
	$0 \vee (y \wedge z) = (0 \vee y) \wedge (0 \vee z)$	
	$(y \wedge z) = (y) \wedge (z)$	✓
$y=0$ (pre $z=0$ rovnako):	$x \wedge (0 \vee z) = (x \wedge 0) \vee (x \wedge z)$	
	$x \wedge (z) = (x \wedge z)$	✓
	$x \vee (0 \wedge z) = (x \vee 0) \wedge (x \vee z)$	
	$x = x \wedge (x \vee z)$	✓
$x=1$:	$1 \wedge (y \vee z) = (1 \wedge y) \vee (1 \wedge z)$	
	$(y \vee z) = y \vee z$	✓
	$1 \vee (y \wedge z) = (1 \vee y) \wedge (1 \vee z)$	
	$1 = 1$	✓
$y=1$ (pre $z=1$ rovnako):	$x \wedge (1 \vee z) = (x \wedge 1) \vee (x \wedge z)$	
	$x = x \vee (x \wedge z)$	✓
	$x \vee (1 \wedge z) = (x \vee 1) \wedge (x \vee z)$	
	$x \vee z = x \vee z$	✓
$x=y$ (pre $x=z$ rovnako):	$x \wedge (x \vee z) = (x \wedge x) \vee (x \wedge z)$	
	$x = x$	✓
	$x \vee (x \wedge z) = (x \vee x) \wedge (x \vee z)$	
	$x = x$	✓
$z=y$:	$x \wedge (y \vee y) = (x \wedge y) \vee (x \wedge y)$	
	$x \wedge y = x \wedge y$	✓
	$x \vee (y \wedge y) = (x \vee y) \wedge (x \vee y)$	
	$x \vee y = x \vee y$	✓

Príklad 1b

Overte, že rovnaké tvrdenie platí pre modulárnosť: $x \leq z \Rightarrow x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge z$.

Riešenie:

$$\begin{array}{ll} x=0, x \leq z: & \begin{array}{l} 0 \vee (y \wedge z) = (0 \vee y) \wedge z \\ (y \wedge z) = (y) \wedge (z) \end{array} \quad \checkmark \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} y=0, x \leq z: & \begin{array}{l} x \vee (0 \wedge z) = (x \vee 0) \wedge z \\ x = x \end{array} \quad \checkmark \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} x \leq z, z=1: & \begin{array}{l} x \vee (y \wedge 1) = (x \vee y) \wedge 1 \\ x \vee y = (x \vee y) \end{array} \quad \checkmark \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} x \leq z, y=1: & \begin{array}{l} x \vee (1 \wedge z) = (x \vee 1) \wedge z \\ z = z \end{array} \quad \checkmark \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} x=y, x \leq z: & \begin{array}{l} x \vee (x \wedge z) = (x \vee x) \wedge z \\ x = x \end{array} \quad \checkmark \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} y=z, x \leq z: & \begin{array}{l} x \vee (z \wedge z) = (x \vee z) \wedge z \\ z = z \end{array} \quad \checkmark \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} x=z: & \begin{array}{l} x \vee (y \wedge x) = (x \vee y) \wedge x \\ x = x \end{array} \quad \checkmark \end{array}$$

Príklad 2.

Overte modulárnosť/distributívnosť a komplementárnosť pre reťazec dĺžky 2,3,4,...

Riešenie:

n=2 1
 |
 0

Všetky prvky sú 0 alebo 1, podľa pr. 1 distributívnosť platí. Komplementárnosť platí triviálne. Je to teda boolovský zväz alebo boolovská algebra – presne tá, čo je nám dôverne známa: 0 a 1, infimum a supremum tu fungujú ako logické * a +, komplement je negácia.

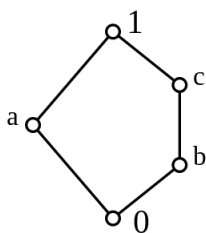
n=3 1
 |
 x
 |
 0

Ak vezmeme tri rozličné prvky, je medzi nimi 0 aj 1. Ak nevezmem tri rozličné prvky, tak aspoň dva sú rovnaké. Podľa pr. 1 distributívnosť platí. Komplementárnosť však už nie – x nemá komplement.

Pre n=4 a viac je situácia rovnaká ako pri n=3.

Príklad 3.

Overte modulárnosť/distributívnosť a komplementárnosť pentagonu N5.



Riešenie:

Modulárnosť: Napr. pre $b \leq c$ by malo platiť $b \vee (a \wedge c) = (b \vee a) \wedge c$.

$$\begin{aligned} \text{Lenže } b \vee (a \wedge c) &= b \vee (0) = b \\ (b \vee a) \wedge c &= 1 \wedge c = c \end{aligned}$$

Rovnosť nie je splnená, zväz N5 *nie je modulárny a teda ani distributívny*.

Komplementárnosť:

$$\begin{aligned} 0' &= 1, 1' = 0 \text{ – triviálne.} \\ b' &= a \\ c' &= a \\ a' &= b, \text{ alebo } c \end{aligned}$$

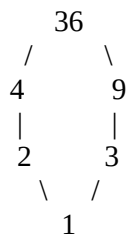
Komplementárnosť je splnená (ale komplementy nie sú vždy jednoznačne určené).

Príklad 4.

Overte modulárnosť/distributívnosť a komplementárnosť hexagonu.

Poznámka: Hexagon môžeme konkrétnejšie reprezentovať napr. ako Hasseho diagram pre $(\{1, 2, 3, 4, 9, 36\}, |)$.
(To len pre potešenie, pokojne tam dajte a, b, c, d...)

Riešenie:



Modulárnosť:

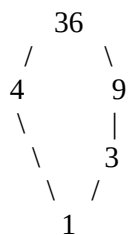
Napr. pre $3 \leq 9$ by malo platiť

$$3 \vee (4 \wedge 9) =? (3 \vee 4) \wedge 9.$$

Lenže $3 \vee (4 \wedge 9) = 3 \vee 1 = 3$
 $(3 \vee 4) \wedge 9 = 36 \wedge 9 = 9$

Hexagon teda nie je modulárny (tj. ani distributívny).

Mimochodom, obsahuje N5 ako svoj podzväz, takže aj z tejto strany sa to dá zdôvodniť:



Komplementárnosť dopadne podobne pozitívne ako v predošlom príklade:

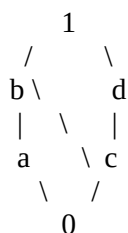
$$0' = 1, 1' = 0$$

$$2' \text{ a } 4' = 3 \text{ alebo } 9$$

$$3' \text{ a } 9' = 2 \text{ alebo } 4$$

Príklad 5.

Overte modulárnosť/distributívnosť a komplementárnosť "hexagonu s priečkou".



Riešenie:

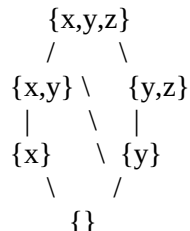
Nebudeme sa zdržovať modulárnosťou a rovno dokážeme distributívnosť, z ktorej modulárnosť vyplynie.

Distributívnosť – postup 1

Musíme overiť všetky možné trojice prvkov. Vzhľadom na pr. 1 vieme, ako niektoré skúmané trojice dopadnú. Preto nám stačí sa obmedziť na trojice, kde nie je 0 ani 1 a všetky 3 prvky sú navzájom rôzne – počet takých je 4, ale netešme sa, každá z nich má 6 možností poradia prvkov. Spolu by to chcelo overiť 24-krát dve rovnosti D1 a D2. No, možno nie všetko (symetria to preriedi), ale je to stále dosť, aby ste strávili pri tom romantickú hodinku. Kto chce, smelo do toho, bude to nezabudnuteľné.

Distributívnosť – postup 2

Skúsme uvedenú štruktúru reprezentovať konkrétnym príkladom, ktorý zvolíme tak šikovne, že nám pomôže uvidieť potrebné súvislosti. Predstavme si "hexagon s priečkou" ako Hasseho diagram vybraných podmnožín množiny $\{x,y,z\}$:



Nie sú to všetky možné podmnožiny, ale ich výber je dosť rafinovaný na to, aby infimum bol prienik a suprérium zjednotenie (neverte tomu bezhlavo, overte to). A sme doma – prienik a zjednotenie distributívny zákon D1 aj D2 **spĺňajú** (to sa overovalo na "starších" cvikách).

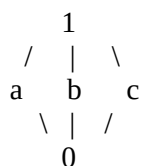
Záver – skúmaný zväz je distributívny (a teda samozrejme aj modulárny).

Komplementárnosť:

Vráťme sa k pôvodnému označeniu prvkov. Bude to rýchle – prvky b, c nemajú komplement. Zväz preto nie je komplementárny.

Príklad 6.

Overte modulárnosť/distributívnosť a komplementárnosť "diamantu" M5.



Riešenie:

Distributívnosť

Na overenie distributívnosti nemusíme skúmať 0, 1. Prvky x,y,z sú si rovnocenné, takže stačí preskúmať jedno (ktorékoľvek) z možných poradí.

$$\begin{aligned}
 D1 \quad a \wedge (b \vee c) &=? (a \wedge b) \vee (a \wedge c) \\
 a \wedge 1 &=? 0 \vee 0 \\
 a &\neq 0
 \end{aligned}$$

Ani netreba pokračovať s D2, distributívnosť je už "pokazená".

Modulárnosť znamená, že pre všetky $x \leq z$ platí $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge z$.

V danom diagrame vidíme, že pre každú možnú dvojicu $x \leq z$ je buď $x=z$ alebo $x=0$ alebo $z=1$. Inak to nejde. Všetky tieto tri možnosti znamenajú, že modulárnosť platí (bolo v pr. 1b).

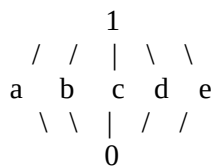
Komplementárnosť

Z obrázku je zrejmé, že $0'=1$, $1'=0$, $a'=b$ alebo c , $b'=a$ alebo c , $c'=a$ alebo b

Záver: Diamant je komplementárny, modulárny, ale nie je distributívny.

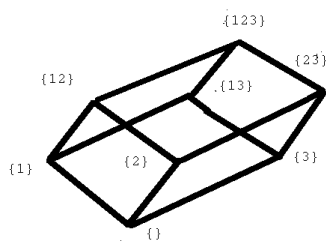
Dodatok

Rozličné XXL diamanty sú na tom rovnako. Dôkazy sú analogické.



Príklad 7.

Overte modulárnosť/distributívnosť a komplementárnosť zväzu $(2^{\{1,2,3\}}, \subseteq)$.

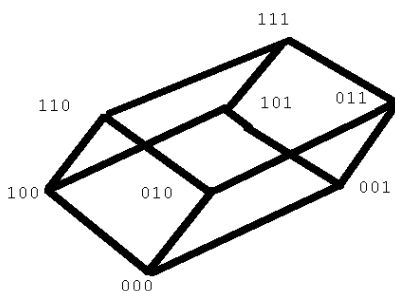


Riešenie:

Distributívnosť: Infimum a suprémum sú prienik a zjednotenie. O nich vieme, že spĺňajú distributívny zákon v oboch obratoch D1, D2.

Komplementárnosť: Podľa Hasseho diagramu ľahko overíme, že komplement v kontexte tohto zväzu sa zhoduje s tradičným množinovým komplementom. Samozrejme, každá z podmnožín tu má svoj (dokonca jednoznačne daný) komplement.

Záver: Zväz $(2^{\{1,2,3\}}, \subseteq)$ je distributívny a komplementárny, teda Boolovský. Čo má spoločné s tou Boolovskou algebrou, ktorú poznáme z DM a "počítačov"? To uvidíme po nasledujúcej kozmetickej úprave – jednotlivé podmnožiny $\{1,2,3\}$ budeme zapisovať takto: Porovnáme podmnožinu s trojicou 1,2,3 (v tomto poradí); ak nejaké číslo z trojice nie je v podmnožine, ohodnotíme to nulou, ak je, zapíšeme 1, všetko na príslušnej pozícii. Opísané je to možno nemotorne, ale z porovnania Hasseho diagramov rýchlo pochopíte, o čo ide:



Miesto podmnožín máme vektory núl a jednotiek.

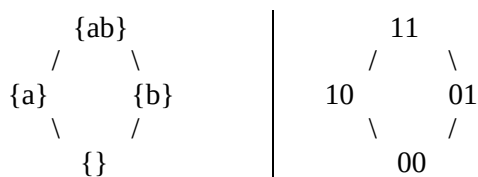
Miesto zjednotenia budeme teraz mať logický súčet po zložkách, miesto prieniku logický súčin po zložkách. (Overte si v diagrame, že to naozaj tak funguje).

Miesto $\subseteq$ bude $\leq$ (nerovnosť pri vektoroch platí práve vtedy, keď je splnená na všetkých zložkách).

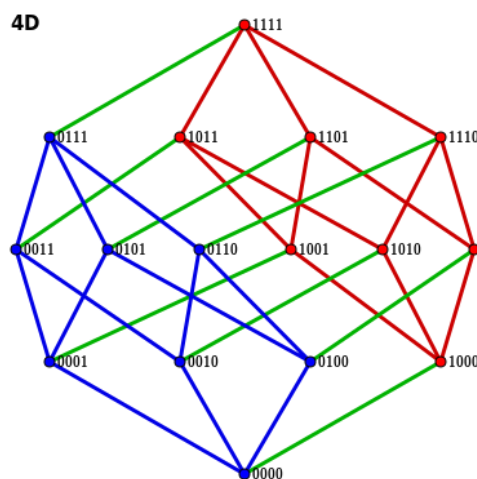
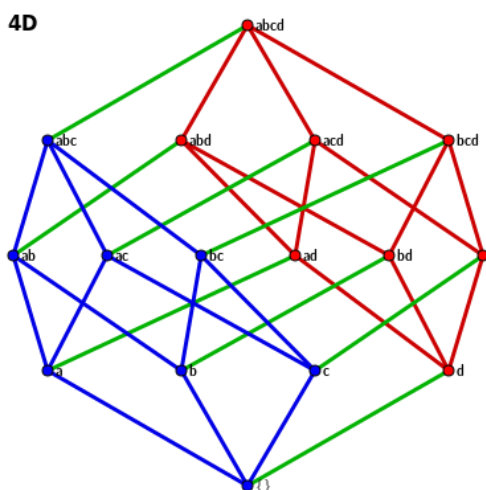
A "sme doma", je to stará známa Boolovská algebra, nuly a jednotky, v n-ticiach.

Poznámka: Príklad funguje rovnako aj pre systém podmnožín množiny s ľubovoľným počtom prvkov. Ukážeme si to na 2- a 4-prvkovej množine (pre 1-prvkovú je to "had" dĺžky 2, riešený skôr).

2 prvky:



4 prvky (písané bez množinových zátvoriek):



Obrázok je požíčaný z <http://n-dimensional.de/cubes/>

Dôležité! Pre každý boolovský zväz vieme nájsť k nemu izomorfný zväz, ktorého prvky sú n-tice núl a jednotiek. A naopak, vždy ak zväzu dokážeme nájsť izomorfného kolegu "na nulách a jednotkách", zväz je boolovský.

Typológia boolovských zväzov je pomerne jednoduchá. Ak všetky možné boolovské zväzy budeme reprezentovať zväzom $(B^n, \leq, \wedge, \vee, 0, 1)$, kde $B = \{0, 1\}$, tak vieme povedať, že ich je spočítateľne veľa. Ich Hasseho diagramy sú akoby n-rozmerné kocky premietnuté do roviny.

Boolovská algebra na vektoroch núl a jednotiek a množinová matematika predstavujú z hľadiska algebry rovnaký typ štruktúry. Podobný zápis relácie ($\leq$ vs. $\subseteq$) a infima so suprémom ($\wedge, \vee$ vs. $\cap, \cup$) nie je náhodný, v princípe ide naozaj o to isté.

K týmto štruktúram môžeme pridať tiež zväzy typu $(D_n, |)$, pokiaľ n má "rozumný tvar".

Príklad 8.

Overte modulárnosť/distributívnosť a komplementárnosť zväzu $(D_{30}, |)$.

Riešenie:

Podľa Hasseho diagramu vidíme, že ide o zväz izomorfný s $(B^3, \leq)$, je to teda Boolovský zväz.

Príklad 9.

Overte modulárnosť/distributívnosť a komplementárnosť zväzu $(D_{12}, |)$.

Riešenie:

Hasseho diagram je "hexagon s priečkou", ktorého vlastnosti sme už skúmali v pr. 5.

Príklad 10.

Nech M je množina všetkých podmnožín N , ktoré sú konečné alebo majú konečný komplement. Overte modulárnosť/distributívnosť a komplementárnosť zväzu $(M, \subseteq, \cap, \cup)$. Je to vôbec zväz?

Riešenie:

Množina M je nekonečná, takže Hasseho diagram nebudeme kresliť. Usporiadanie $\subseteq$ je štandardná inklúzia, teda ide o ČU. Operácie $\cap, \cup$ sú tiež štandardné, otázkou je len to, či sa správajú na M slušne (tj. majú jednoznačný výsledok a ten padne do M). Overíme:

Nech A, B sú konečné podmnožiny N a C, D podmnožiny s konečným komplementom.

Platí: $A \cap B$ je konečná, $A \cup B$ je konečná.

$(C \cap D)' = C' \cup D'$ je konečná, $(C \cup D)' = C' \cap D'$ je konečná

(tj. prienik aj zjednotenie C a D majú konečný komplement a patria do M)

$A \cap C$ je konečná, $(A \cup C)' = A' \cap C'$ je konečná.

Distributívny zákon pri prieniku so zjednotením platí.

Komplementárnosť platí triviálne (M sme totiž cielene definovali tak, aby to vyšlo).

Záver: Je to (nekonečný/spočítateľný) boolovský zväz.

Príklad 11.

Nech M je množina všetkých boolovských funkcií 2 premenných. Relácia $\leq$ je daná tak, že $f \leq g$ práve vtedy, keď pre všetky možné vstupy x, y platí $f(x, y) \leq g(x, y)$.

Je $(M, \leq)$ zväz? Aké má vlastnosti?

Riešenie:

Ako si dobre pamätáme, boolovských funkcií 2 premenných je 16. Všetky vieme jednoznačne vyjadriť usporiadanou štvoricou ich výstupných hodnôt pre 4 možné vstupy

(obr. požičaný z <http://www.sdmath.com/math/discrete/boolean.html>):

B	:	1	1	0	0		
A	:	1	0	1	0		
						Boolean function	Set
0	=	0	0	0	0	= False	= Empty set
1	=	0	0	0	1	= A nor B	= {0}
2	=	0	0	1	0	= A & ¬B	= {1}
3	=	0	0	1	1	= ¬B	= {0, 1}
4	=	0	1	0	0	= ¬A & B	= {2}
5	=	0	1	0	1	= ¬A	= {0, 2}
6	=	0	1	1	0	= A xor B	= {1, 2}
7	=	0	1	1	1	= A nand B	= {0, 1, 2}
8	=	1	0	0	0	= A & B	= {3}
9	=	1	0	0	1	= A = B	= {0, 3}
10	=	1	0	1	0	= A	= {1, 3}
11	=	1	0	1	1	= A = B	= {0, 1, 3}
12	=	1	1	0	0	= B	= {2, 3}
13	=	1	1	0	1	= A ⇒ B	= {0, 2, 3}
14	=	1	1	1	0	= A or B	= {1, 2, 3}
15	=	1	1	1	1	= True	= {0, 1, 2, 3}

Hasseho diagram bude rovnaký ako v dodatku k pr. 7 (4 prvky). Ide teda o rovnakú algebr. štruktúru.

B. Boolovské zväzy a okruhy

Pojmy a riešené príklady

Boolovský zväz zväz, ktorý je komplementárny a distributívny
Boolovský okruh okruh, v ktorom pre každý prvok x platí $x * x = x$ (idempotentnosť)

Úvaha A

Nech je daný boolovský zväz $(M, \leq, \wedge, \vee, 0, 1)$. Definujeme operácie:

$$\begin{aligned}x \otimes y &= x \wedge y \\x \oplus y &= (x' \wedge y) \vee (x \wedge y')\end{aligned}$$

Potom štruktúra $(M, \oplus, \otimes)$ je okruh. (Dôkaz naznačíme nižšie.)

Príklad 1

Pre množinovú matematiku, teda boolovský zväz $(2^X, \subseteq, \cap, \cup, \{ \}, X)$, novodefinované operácie budú

$$\begin{aligned}A \cap B & \quad \text{– nezmenené} \\(A' \cap B) \cup (A \cap B') &= A \Delta B \quad \text{– symetrická diferencia}\end{aligned}$$

Daný boolovský zväz indukuje okruh $(2^X, \Delta, \cap)$ – že je to okruh s jednotkou, sme dokázali v jednom z príkladov v téme okruhov.

Príklad 2

Pre boolovský zväz $(B^n, \leq, *, +, 0000\dots, 1111\dots)$, novodefinované operácie budú

$$\begin{aligned}x * y & \quad \text{– nezmenené} \\x' * y + x * y' &= x \oplus y \quad \text{– XOR (po zložkách)}\end{aligned}$$

Daný boolovský zväz indukuje okruh $(B^n, \oplus, *)$. Že je to okruh s jednotkou, nemusíme dokazovať, plyní to z izomorfizmu s $(2^X, \Delta, \cap)$.

V príkladoch 1,2 sme ukázali dve konkrétne realizácie okruhu indukovaného boolovským zväzom. Ide stále o rovnakú štruktúru, konkrétna realizácia je len jej tvárou, nie zmenou či obmedzením. Všetko, čo môžeme tvrdiť v kontexte príkladu 1, platí aj v príklade 2 a rovnako aj vo všeobecnosti pre $(M, \oplus, \otimes)$. Tj., je to okruh s jednotkou.

Poznámka. Idempotentnosť je splnená, lebo napr. $A \cap A = A$.

Úvaha B

Nech je daný boolovský okruh $(M, \oplus, \otimes)$ a operácia $\otimes$ je idempotentná.

Definujeme operácie:

$$\begin{aligned}x \wedge y &= x \otimes y \\x \vee y &= x \oplus y \oplus x \otimes y\end{aligned}$$

a reláciu $\leq$:

$$x \leq y \text{ práve vtedy, keď } x \wedge y = x$$

Potom štruktúra $(M, \leq, \wedge, \vee)$ je boolovský zväz. Prvky 0, 1 sú neutrálne prvky operácií okruhu.

Vráťte sa k príkladom 1, 2 a skúste si tento "spätný chod" – ubezpečte sa, že funguje a dostanete sa naozaj tam, odkiaľ sme na začiatku vyšli.

Neriešené príklady

Modulárnosť, distributívnosť, komplementárnosť = MDK.

1. Zistite, či je zväz $(D_{60}, |)$, tj. delitele 60 a relácia „delí“, komplementárny. Pre aké n je $(D_n, |)$ boolovský?
2. Nech M je množina reálnych funkcií $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a usporiadanie $f \leq g$ znamená, že $f(x) \leq g(x)$ pre všetky $x \in \mathbb{R}$. Je to zväz? Overte MDK.
3. Sú zväzy $(D_{50}, |)$ a $(D_{45}, |)$ izomorfné? Overte MDK.
4. Nech $M = \{1, 2, 3, 4, 9, 12, 18, 36\}$. Je $\{M, | \}$ zväz? Overte MDK.
5. Nech $M = \{a, b, c, d\}$ a množina A je množina všetkých podmnožín množiny M s párnym počtom prvkov. Zistite, či $(A, \subseteq)$ je zväz a overte MDK.
6. Nech $M = \{a, b, c, d, e\}$ a množina A je množina všetkých podmnožín množiny M s nepárnym počtom prvkov. Zistite, či $(A, \subseteq)$ je zväz a overte MDK.
7. Pomocou Hasseho diagramov nižšie sú dané ČUM. Overte, či sú to zväzy a či platí MDK.

