

Zväz (Lattice)

Pojmy

Čiastočné usporiadanie	relácia, ktorá je reflexívna, antisymetrická, tranzitívna (čiastočné je preto, lebo nie každé 2 prvky musia byť porovnateľné)
ČUM, POSet	Čiastočne <u>U</u> sporiadaná <u>M</u> nožina (Partially <u>O</u> rdered <u>S</u> ET)
Hasseho diagram	https://en.wikipedia.org/wiki/Hasse_diagram Je to zjednodušený graf relácie, kde: – nekreslíme šípky, lebo smerovanie hrán je dohodnuté zdola hore, prípadne zľava doprava – nekreslíme slučky reflexívnosti (vieme o nich, že sú všade, to stačí) – tranzitívnosť využijeme tak, že budeme kresliť len spojenie s najbližším porovnateľným prvkom Graf by mal byť nielen správny, ale aj "pekný" - teda čo najlepšie graficky znázorňovať realitu vzťahov.
Priesek, infimum, join Spojenie, supremum, meet	$x \wedge y$ je najväčší z prvkov, ktoré sú menšie alebo rovné prvkom x, y $x \vee y$ je najmenší z prvkov, ktoré sú väčšie alebo rovné prvkom x, y Infimum a supremum musia byť určené <u>jednoznačne</u> , inak sa neuznávajú.
Zväz	ČUM, kde pre <u>každú</u> dvojicu prvkov existuje priesek aj spojenie
Zväzový homomorfizmus	homomorfizmus rešpektujúci usporiadanie, infima a suprema
0,1 alebo ①, ②, alebo O, I	Najmenší a najväčší prvok zväzu. Obvykle sa značia 0,1, iné označenia sa používajú, ak usporiadaná množina pozostáva z čísel a mohlo by prísť k nedorozumeniam. 0 je neutrálny prvok operácie $\vee$, 1 je neutrálny prvok operácie $\wedge$ 0 je absorpčný prvok operácie $\wedge$, 1 je absorpčný prvok operácie $\vee$ Ak je zväz konečný, musí obsahovať 0 aj 1.

Riešené príklady

Príklad 1a

Je daná množina s reláciou $(\mathbb{Z}, \leq)$. Čo vieme o nej povedať?

Riešenie:

Daná relácia je reflexívna, antisymetrická aj tranzitívna. Ide teda o čiastočné usporiadanie.

Na danej množine dokonca vieme porovnať každé dva prvky, takže slovo "čiastočné" sa tu dá vynechať alebo nahradiť slovom "lineárne".

Hasseho diagram je nekonečne veľký a nudný. Krátky úryvok (orientácia zľava doprava):

$$\dots -5 -4 -3 -2 -1 -0 -1 -2 -3 -4 -5 - \dots$$

Infimum a supréum: $x \wedge y = \min \{x, y\}$, $x \vee y = \max \{x, y\}$. Daná štruktúra je zväz.

Najmenší a najväčší prvok nemáme – za bežných okolností (v štandardnej topológii) plus a mínus nekonečno nie sú čísla / prvky množiny.

Príklad 1b

Je daná množina s reláciou $(\mathbb{N}, \leq)$. Čo vieme o nej povedať?

Riešenie:

Platí to, čo vyššie. Navyše však už vieme nájsť najmenší prvok. Ak nulu nepovažujeme za prirodzené číslo, potom $\textcircled{0} = 1$.

$$1 - 2 - 3 - 4 - 5 - \dots$$

Príklad 1c

Je daná množina s reláciou $(\{1, 2, 3, 4, 5\}, \leq)$. Čo vieme o nej povedať?

Riešenie:

Platí to, čo vyššie. Navyše však už vieme nájsť najmenší a najväčší prvok: $\textcircled{0} = 1$, $\textcircled{1} = 5$.

Hasseho diagram:

$$1 - 2 - 3 - 4 - 5$$

Príklad 2

Je dané zobrazenie $h: (\mathbb{R}, \leq) \rightarrow (\mathbb{Z}, \leq)$, $h(x) = \lfloor x \rfloor$ (zaokrúhlenie nadol, tj. odseknutie desatinnej časti). Je to zväzový homomorfizmus?

Riešenie:

Predovšetkým treba konštatovať, že obe štruktúry sú zväzy (ľahko sa dokáže), hoci Hasseho diagram pre $(\mathbb{R}, \leq)$ by som radšej nekreslil...

Ak v $\mathbb{R}$ platí $x \leq y$, je nepochybné, že celá časť x nemôže byť väčšia ako celá časť y , teda aj $h(x) \leq h(y)$.

Overíme rešpekt zobrazenia k infimam a supréumam. Infimum je $\min(x, y)$, supréum je $\max(x, y)$.

$h(\min(x, y))$ je menšie z čísel x, y , ktorému zmažeme desatinnú časť.

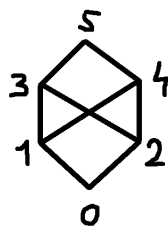
$\min(h(x), h(y))$ sú čísla x, y , ktorým zmažeme desatinnú časť a až následne vyberieme to minimum z nich. Výsledok je rovnaký.

Podobne to bude s $h(\max(x, y))$ a $\max(h(x), h(y))$

Zobrazenie je homomorfizmus.

Príklad 3

Je daná nasledujúca ČUM (Hasseho diagram nižšie, zdola nahor). Je to zväz?



Riešenie:

Infimum bodov 3,4 by mohlo byť 1 aj 2. Suprémum bodov 1,2 by mohlo byť 3 aj 4. Infimum a suprémum nie sú určené jednoznačne, takže v zmysle dôslednej zväzovej kultúry tu ani neexistujú. Daná štruktúra nie je zväz.

Príklad 4a

Je daná množina D_{18} deliteľov čísla 18 a relácia $|$ "delí" (je deliteľom): $(D_{18}, |)$.

Čo vieme o nej povedať? Aký je vzťah medzi D_{18} a D_{12} ?

Riešenie:

Relácia "delí" je čiastočným usporiadaním:

- je reflexívna, lebo vždy (triviálne) platí $x|x$
- je antisymetrická, lebo ak $x|y$ a zároveň $y|x$, potom $x=y$
- je tranzitívna, lebo ak $x|y$, $y|z$, potom nepochybne $x|z$.

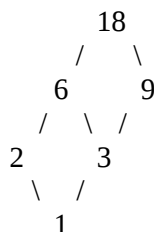
Infimum a suprémum: $x \wedge y = \text{NSD}(x,y)$, $x \vee y = \text{NSN}(x,y)$. Treba však zdôrazniť, že infimum a suprémum takto "fungujú" iba vtedy, ak je množina deliteľov kompletná. Vynechaním nejakých čísel sa to dá pokaziť.

Daná štruktúra je zväz. $\textcircled{0} = 1$, $\textcircled{1} = 18$

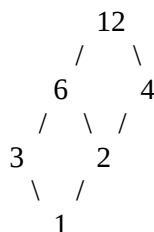
Hasseho diagram (zdola nahor, tak aj naďalej): $\rightarrow$ obr. a

Rovnaký Hasseho diagram by sme dostali pre delitele 12 (obr. b). Nie je totiž podstatné, ktoré konkrétne číslce sú v hre, ale koľko je rozličných prvočiniteľov a aké sú ich mocniny:

Obr. a



b



O štruktúre $(D_{12}, |)$ teda vieme povedať presne to isté, čo o $(D_{18}, |)$. Sú navzájom izomorfné.

Izomorfizmus $h: (D_{18}, |) \rightarrow (D_{12}, |)$ je iba jediný:

$$1 \rightarrow 1, 2 \rightarrow 3, 3 \rightarrow 2, 6 \rightarrow 6, 9 \rightarrow 4, 18 \rightarrow 12$$

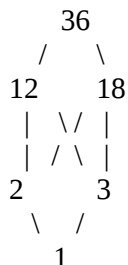
Príklad 4b

Je daná množina $D = \{1, 2, 3, 12, 18, 36\}$ a relácia $|$ "delí" (je deliteľom): $(D, |)$.

Čo vieme o nej povedať?

Riešenie:

Relácia "delí" je čiastočným usporiadaním, ako sme už ukázali. Hasseho diagram je nasledovný.



Je zrejmé, že nekompletnosť množiny deliteľov 36 neumožňuje definovať infimum a suprémum ako NSD a NSN. A nedajú sa definovať ani inak. (Cf. príklad 3)

Príklad 5

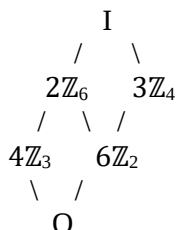
Je daná štruktúra $(p(\mathbb{Z}_{12}), \subseteq)$, kde $p(\mathbb{Z}_{12})$ je množina všetkých podgrúp cyklickej grupy $(\mathbb{Z}_{12}, +)$ a relácia $\subseteq$ tu znamená "je podgrupou". Čo vieme o nej povedať?

Riešenie:

Najprv preskúmame, aké prvky sa nachádzajú v $p(\mathbb{Z}_{12})$. Budeme vypisovať len samotné množiny, operácia $+$ sa predpokladá paušálne:

$O = \{0\}$, $6\mathbb{Z}_2 = \{0, 6\}$, $4\mathbb{Z}_3 = \{0, 4, 8\}$, $3\mathbb{Z}_4 = \{0, 3, 6, 9\}$, $2\mathbb{Z}_6 = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$, $I = \mathbb{Z}_{12}$

Hasseho diagram:



Ako vidíme z diagramu, ide o rovnakú štruktúru ako v príklade 4. Je to teda zváz (prevezmeme poznatky). Izomorfizmus s D_{12} je nasledovný:

$$1 \rightarrow O, k \rightarrow (12/k)\mathbb{Z}_k, 12 \rightarrow I$$

Príklad 6

Je daná množina D_{30} deliteľov čísla 30 a relácia $|$ "delí" (je deliteľom): $(D_{30}, |)$.

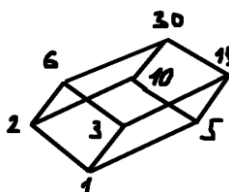
Čo vieme o nej povedať?

Riešenie:

Ide o ČUM, ukázali sme to už vyššie. Infimum a suprémum sú opäť NSD a NSN. Je to zváz.

$\textcircled{0} = 1$, $\textcircled{1} = 30$.

Hasseho diagram:



Príklad 7

Nech $X=\{1,2,3\}$. Čo vieme povedať o štruktúre $(2^X, \subseteq)$?

Riešenie:

Relácia $\subseteq$ je čiastočným usporiadaním:

je reflexívna, lebo vždy (triviálne) platí $A \subseteq A$

je antisymetrická, lebo ak $A \subseteq B$ a zároveň $B \subseteq A$, potom $A=B$

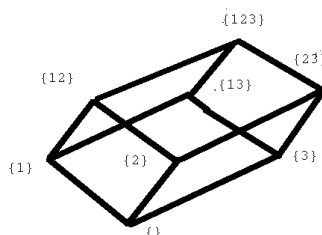
je tranzitívna, lebo ak $A \subseteq B$, $B \subseteq C$, potom nepochybne $A \subseteq C$.

Infimum a suprémum: $A \wedge B = A \cap B$, $A \vee B = A \cup B$. $0 = \{\}$, $1 = X$

Poznámka: Podobnosť znakov $\wedge$ a $\cap$, $\vee$ a $\cup$ nie je náhodná.

Daná štruktúra je zväz.

Hasseho diagram:



Hasseho diagram je rovnaký ako v predošlom príklade. Ide teda o tú istú algebraickú štruktúru, len s odlišným označením prvkov. Inými slovami, $(D_{30}, |)$ a $(2^{\{1,2,3\}}, \subseteq)$ sú izomorfné.

Ak už sme objavili izomorfizmus, skúsme ešte určiť konkrétne možné izomorfizmy. Je až 6 možností (ubezpečte sa, že sú všetky správne a doplňte chýbajúce hodnoty):

$h: (D_{30}, |) \rightarrow (2^{\{1,2,3\}}, \subseteq)$

a)	$h(2)=\{1\}$	$h(3)=\{2\}$	$h(5)=\{3\}$
b)	$h(2)=\{1\}$	$h(3)=\{3\}$	$h(5)=\{2\}$
c)	$h(2)=\{2\}$	$h(3)=\{1\}$	$h(5)=\{3\}$
d)	$h(2)=\{2\}$	$h(3)=\{3\}$	$h(5)=\{1\}$
e)	$h(2)=\{3\}$	$h(3)=\{1\}$	$h(5)=\{2\}$
f)	$h(2)=\{3\}$	$h(3)=\{2\}$	$h(5)=\{1\}$

Všetkých šesť izomorfizmov sme definovali minimalisticky – iba na prvkoch prvej hladiny. Teda prvočinitele sme zobrazili na jednoprvkové množiny. Ďalšie čísla a ich zobrazenia na príslušné podmnožiny už sú týmto jednoznačne definované (musia byť, aby to bol izomorfizmus a nie "hocijaké" zobrazenie).

Ukážeme si "dokončenie" na prvom navrhnutom izomorfizme (ostatné zvládnete samostatne):

a) $h(2)=1$ $h(3)=2$ $h(5)=3$

$$h(1)=h(\text{NSD}(2,3))=h(2) \cap h(3)=\{1\} \cap \{2\}=\{\}$$

$$h(6)=h(\text{NSN}(2,3))=h(2) \cup h(3)=\{1\} \cup \{2\}=\{1,2\}$$

$$h(10)=h(\text{NSN}(2,5))=h(2) \cup h(5)=\{1\} \cup \{3\}=\{1,3\}$$

$$h(15)=h(\text{NSN}(3,5))=h(3) \cup h(5)=\{2\} \cup \{3\}=\{2,3\}$$

$$h(30)=h(\text{NSN}(10,15))=h(10) \cup h(15)=\{1,3\} \cup \{2,3\}=\{1,2,3\}$$

Príklad 8

Preskúmajte štruktúru $(p(\mathbb{Z}_{30}), \subseteq)$.

Riešenie:

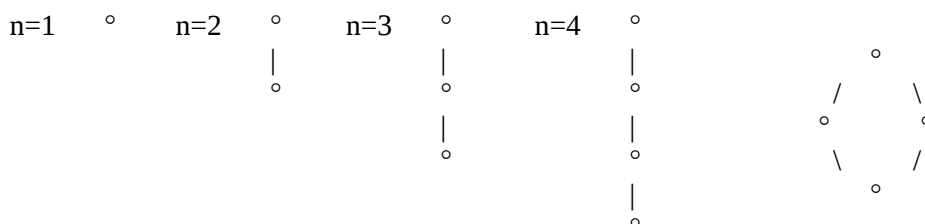
Miesto riešenia, ktoré je opakovaním napísaného (s iným označením prvkov), iba skonštatujeme, že ide o štruktúru izomorfnú s tými v príkladoch 6-7.

Príklad 9

Nájdite všetky n -prvkové zväzy (pre $n=1,2,3,4,5,6$, a kto si trúfa, tak aj 7, 8, ...). Hľadajte len čistú štruktúru vyjadrenú Hasseho diagramom – na označení vrcholov nezáleží, ani na tom, ako by vyzeral predpis relácie. (Ale nájsť potom pre každú štruktúru aj nejakú konkrétnu realizáciu môže byť užitočné)

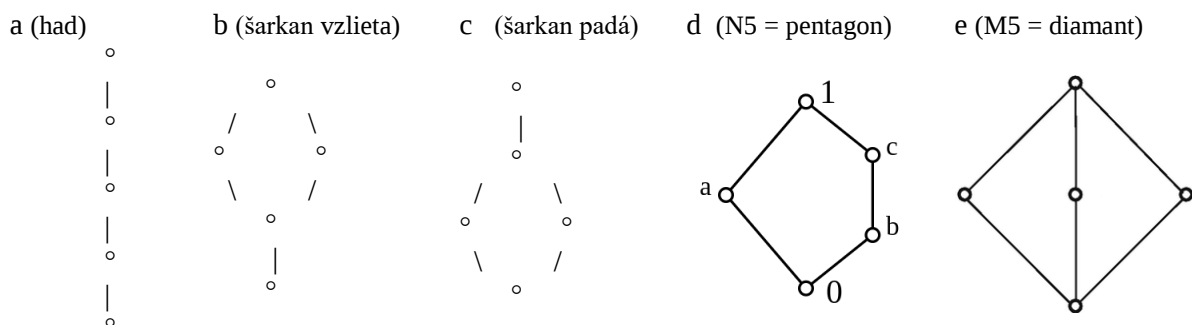
Riešenie:

Ako na to? Stačí hľadať všetky možné Hasseho diagramy s n vrcholmi, s najmenším a najväčším prvkom, a overiť "fungovanie" (najmä jednoznačnosť) supréma a infima.



Pre $n=5$ a 6 skúste najprv samostatne, až dodatočne si to skontrolujete s riešením tu uvedeným. Fakt, je to zábavné, nepripravte sa o zážitok.

$n=5$

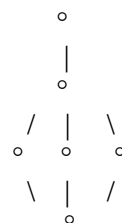
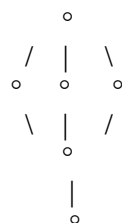
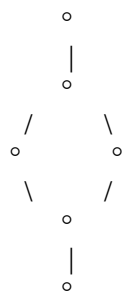
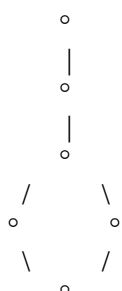
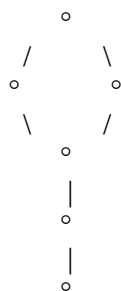


Je jedno, či N5 kreslíme takto alebo ľavo-pravo otočené, štruktúra je to tá istá.

Názvy N5 = pentagon, M5 = diamant sú "oficiálne zaužívané", ostatné (a,b,c) sú len folklórom, ktorý sa počas rokov spontánne zrodil na cvičeniach AŠ. To isté platí o názvoch pre $n=6$.

n=6

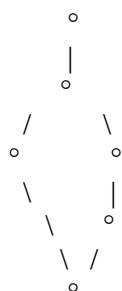
a (had) b (šarkan vzlieta) c (šarkan padá) d (šarkan váha) e (diamant vzlieta) f (diamant padá)



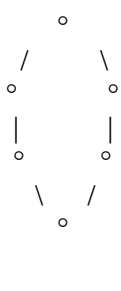
g (pentagon vzlieta)



h (pentagon padá)



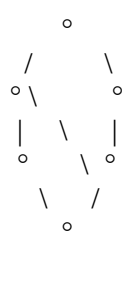
i (hexagon)



j (hexagon 1:3)



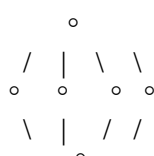
k (hexagon s priečkou)



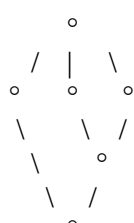
l (diamant 1:1:2)



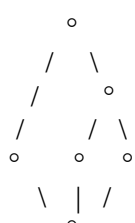
m (diamant +1)



n (2 v 1 hore)



o (2 v 1 dole)



Dodatočné otázky.

1. Našli ste ďalší zváz, ktorý nie je uvedený vo vyššie uvedenom zozname? Potom sa ubezpečte, že to, čo ste našli, buď nie je zváz (napr. lákavý hexagon s dvoma priečkami), alebo v skutočnosti už v tom zozname je (len inak nakreslený).
2. Nájdite dvojice navzájom duálnych zvázov (ak zváz necháte padnúť na hlavu, dostanete duálny zváz). Pomôcka – väčšinou sú v zozname uvedené vedľa seba.
3. Ktoré z vyššie uvedených zvázov sú samoduálne (postavíte ho na hlavu a on je stále ten istý)

Kto si trúfa, môže pokračovať pre n=7. Aspoň skúsiť aplikovať tie postupy, ktorými sme z 5-prvkových vyrábali niektoré 6-prvkové.

Neriešené príklady

1. Nech X sú všetky možné rozklady množiny $M = \{1, 2, 3, 4\}$ na triedy ekvivalencie (tj. na disjunktné podmnožiny, ktorých zjednotenie je M) a relácia ČU je na X daná tak, že $D1 \subseteq D2$ práve vtedy, ak každá trieda z $D1$ je podmnožinou niektorej z tried $D2$.

Overte, či je $(X, \subseteq)$ zväz, určte operácie supréma a infima, O, I , a nakreslite Hasseho diagram.

2. Nakreslite *pekné* Hasseho diagramy pre zväzy $(\{\text{delitele } 180\}, |)$, $(\{\text{delitele } 210\}, |)$.

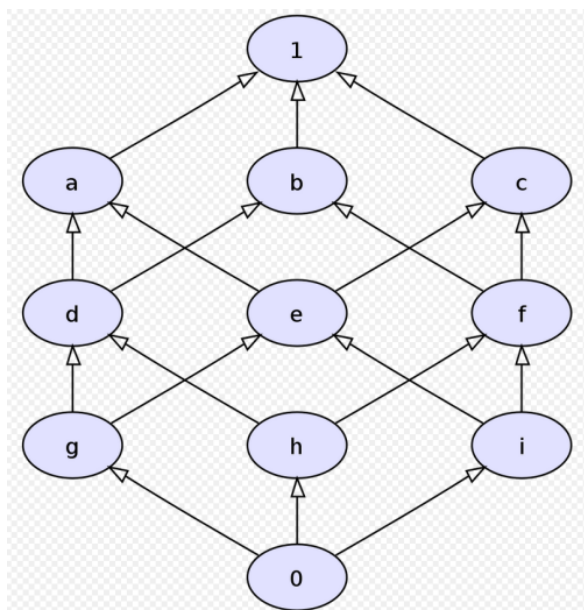
Určte operácie supréma a infima, O, I .

3. Nakreslite Hasseho diagram pre zväz $(X, \subseteq)$, kde X je množina všetkých podgrúp cyklickej grupy a) rádu 12, b) rádu 72. Určte operácie supréma a infima, O, I .

4. Nakreslite Hasseho diagram pre zväz $(X, \subseteq)$, kde X je množina všetkých podgrúp grupy $(\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_6, +)$. Určte operácie supréma a infima, O, I .

5. Nakreslite Hasseho diagram pre zväz $(X, \subseteq)$, kde X je množina všetkých podgrúp grupy $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_6, +)$. Určte operácie supréma a infima, O, I .

6. Na obrázku je daná ČUM. Overte, či je to zväz. Nahraďte označenia $a, b, \dots, i, 0, 1$, vhodnými číslami tak, aby ste s reláciou “delí” dostali rovnaký Hasseho diagram.



Poznámka: Obrázok je prevzatý z ... (uvedieme neskôr, teraz by to prezradilo viac než je žiadúce).